

[1]

(1)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (x + a \cos x + a^2 \sin x)^2 dx \\ &= \int_0^\pi (x^2 + a^2 \cos^2 x + a^4 \sin^2 x + 2ax \cos x + 2a^2 x \sin x + 2a^3 \sin x \cos x) dx \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\int_0^\pi x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 x dx &= \int_0^\pi \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^2 x dx &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \cos x dx &= [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x dx \\ &= 0 - [-\cos x]_0^\pi \\ &= -1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x \sin x dx &= -[x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^\pi \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x \cos x dx &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi (x^2 + a^2 \cos^2 x + a^4 \sin^2 x + 2ax \cos x + 2a^2 x \sin x + 2a^3 \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{3} \pi^3 + a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + a^4 \cdot \frac{\pi}{2} + 2a \cdot (-2) + 2a^2 \pi \\ &= \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} a^2 - 4a + \frac{1}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} a^2 - 4a + \frac{1}{3} \pi^3$$

(2)

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} a^2 - 4a + \frac{1}{3} \pi^3 \\ &= \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} \left(a - \frac{4}{5\pi} \right)^2 + \frac{8}{5\pi} \cdot \frac{5\pi^4 - 24}{24} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\frac{5\pi}{2} \left(a - \frac{4}{5\pi} \right)^2 \geq 0$$

であり、また $\pi > 3$ より、 $\pi^4 > 81$ であるから、

$$\frac{8}{5\pi} \cdot \frac{5\pi^4 - 24}{24} > 0$$

である。したがって、

$$I = \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} \left(a - \frac{4}{5\pi} \right)^2 + \frac{8}{5\pi} \cdot \frac{5\pi^4 - 24}{24} > \frac{\pi}{2} a^4$$

となる。

(証明終)

〔3〕

(1)

円 C_k の方程式は,

$$(x-3k)^2 + (y-4k)^2 = (5k+1)^2$$

である。ここで、 $x=y=0$ とすると,

$$(x-3k)^2 + (y-4k)^2 = (5k)^2 < (5k+1)^2 \quad (\because k > 0)$$

となるので、円 C_k は原点を通らない。

(答) 通らない

(2)

$$(x-3k)^2 + (y-4k)^2 = (5k+1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 = 2k(3x + 4y + 5)$$

を満たす $k(>0)$ が存在するような、点 (x, y) の存在範囲を求めればよい。

したがって,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 > 0 \\ 3x + 4y + 5 > 0 \end{cases}$$

または,

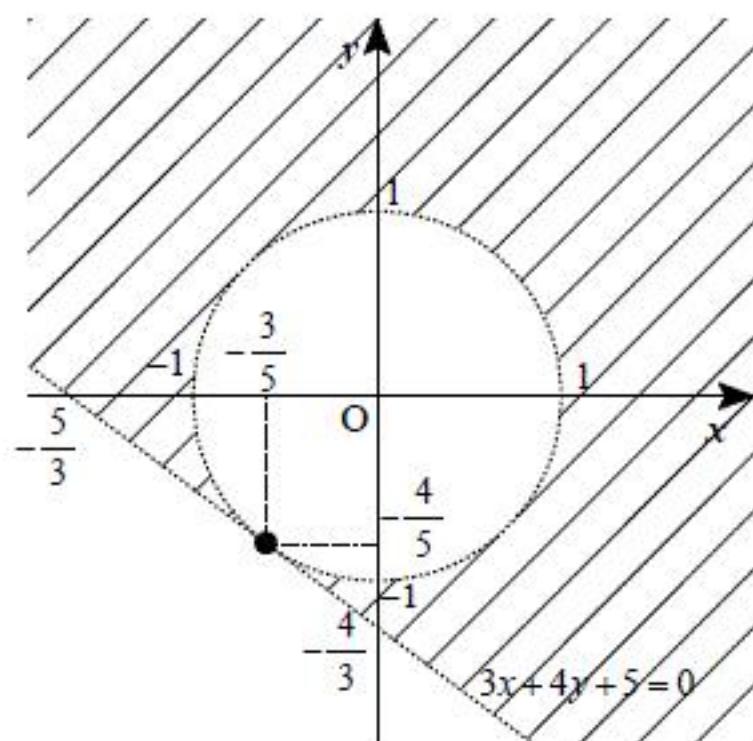
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 < 0 \\ 3x + 4y + 5 < 0 \end{cases}$$

または,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 3x + 4y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

であればよく、これらを図示すると次図の斜線部のようになる。

(ただし、境界は点 $\left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ のみを含み、それ以外の部分は含まない。)



(答) 前図

[4]

$y = |(x-1)(x+1)|$ について、

$$-1 < x < 1 \text{ のとき, } y = -(x-1)(x+1) = -x^2 + 1$$

$$x \leq -1, 1 \leq x \text{ のとき, } y = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

である。

[1] $-1 < x < 1$ で2つのグラフが共有点をもつ場合

方程式、

$$ax^2 + b = -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (a+1)x^2 = -b+1 \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす $x (-1 < x < 1)$ が存在すればよい。ここで、

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

ならば、 $\textcircled{1}$ を満たす x は存在する。また、 $a \neq -1$ のとき、

$$x^2 = \frac{-b+1}{a+1}$$

であるから、

$$0 \leq x^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{-b+1}{a+1} < 1$$

であればよい。したがって、 $a < -1$ ならば、

$$0 \leq \frac{-b+1}{a+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -b+1 > a+1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq b < -a$$

となり、 $a > -1$ ならば、

$$0 \leq \frac{-b+1}{a+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -b+1 < a+1$$

$$\Leftrightarrow -a < b \leq 1$$

となる。したがって、

$$\text{「} a < -1 \text{ かつ } 1 \leq b < -a \text{」}$$

$$\text{または 「} a > -1 \text{ かつ } -a < b \leq 1 \text{」}$$

$$\text{または 「} (a, b) = (-1, 1) \text{」}$$

となる。

[2] $x \leq -1, 1 \leq x$ で2つのグラフが共有点をもつ場合

方程式、

$$ax^2 + b = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2 = -b-1 \quad \dots \textcircled{2}$$

を満たす $x (x \leq -1, 1 \leq x)$ が存在すればよい。ここで、

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

ならば、 $\textcircled{2}$ を満たす x は存在する。また、 $a \neq 1$ のとき、

$$x^2 = \frac{-b-1}{a-1}$$

であるから、

$$x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-b-1}{a-1} \geq 1$$

であればよい。したがって、 $a < 1$ ならば、

$$\frac{-b-1}{a-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -b-1 \leq a-1$$

$$\Leftrightarrow b \geq -a$$

となり、 $a > 1$ ならば、

$$\frac{-b-1}{a-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -b-1 \geq a-1$$

$$\Leftrightarrow b \leq -a$$

となる。したがって、

$$\text{「} a < 1 \text{ かつ } b \geq -a \text{」}$$

$$\text{または 「} a > 1 \text{ かつ } b \leq -a \text{」}$$

$$\text{または 「} (a, b) = (1, -1) \text{」}$$

となる。

以上[1], [2]をまとめると、

$$\begin{cases} a < -1 \text{ のとき } 1 \leq b \\ -1 \leq a < 1 \text{ のとき } b \geq -a \\ a = 1 \text{ のとき } -1 \leq b \leq 1 \\ 1 < a \text{ のとき } b \leq 1 \end{cases}$$

となり、図示すると次図の斜線部分のようになる。

(ただし、境界は実線部分を含み、点線部分是不含み。)

