

〔1〕

真数条件より,

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x-1>0 \\ y>0 \\ 11-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<11 \\ y>0 \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。ここで、不等式を変形すると,

$$\log_3(x+1)+\log_3(x-1)\leq\log_3 y-1\leq\log_3(11-x)$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2-1)\leq\log_3\frac{y}{3}\leq\log_3(11-x)$$

$$\Leftrightarrow x^2-1\leq\frac{y}{3}\leq 11-x \quad \dots \textcircled{2}$$

である。ここで,

$$x^2-1\leq 11-x$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-12\leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)(x+4)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow -4\leq x\leq 3$$

であり、これと①を満たす整数 x は,

$$x=2, 3$$

である。

[1] $x=2$ のとき

②より,

$$2^2-1\leq\frac{y}{3}\leq 11-2$$

$$\Leftrightarrow 9\leq y\leq 27$$

であるから、 $x=2$ のとき整数の組 (x, y) は 19 個ある。

[2] $x=3$ のとき

②より,

$$3^2-1\leq\frac{y}{3}\leq 11-3$$

$$\Leftrightarrow 24\leq y\leq 24$$

であるから、 $x=3$ のとき整数の組 (x, y) は 1 個ある。

以上[1], [2]より、整数の組 (x, y) は全部で,

$$19+1=20 \quad (\text{個})$$

となる。

[2]

(1)

次のような群数列を考える。

$$\frac{1}{1} \left| \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{2}{1} \right| \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1} \left| \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \dots \right.$$

第 k 群の項数は $2k-1$ であり、第 k 群の k 番目の項は $\frac{k}{k}$ である。

また、第 1 群から第 n 群までの項数は、

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n = n^2$$

である。ここで、有理数 $\frac{11}{8}$ が初めて現れるのは、第 11 群の $(11+3)$ 番目であるから、

$$10^2 + 11 + 3 = 114$$

より、第 114 項となる。

(答) 第 114 項

(2)

$12^2 = 144$, $13^2 = 169$ であるから、第 160 項は第 13 群の後ろから 10 番目である。

したがって、その値は $\frac{13}{10}$ となる。

(答) $\frac{13}{10}$

(3)

値が 2 となる項は、偶数群にそれぞれ 1 個ずつ含まれる。

ここで、 $31^2 = 961$, $32^2 = 1024$ であるから、第 1000 項は第 32 群の 39 番目である。したがって、

第 1000 項の値は $\frac{32}{25}$ であり、第 32 群に含まれる $2\left(\frac{32}{16}\right)$ は第 1001 項以降にある。

よって、第 31 群までの偶数群の個数を考えればよいので、第 1000 項までに値が 2 となる項の総数は 15 個となる。

(答) 15 個

〔3〕

(1)

並べたカードを左から a, b, c とすると,

$$M = 100a + 10b + c$$

$$N = a + 10b + 100c$$

であるから,

$$M + N = 101a + 20b + 101c$$

$$= 3(33a + 6b + 33c) + 2(a + b + c)$$

である。ここで、 $3(33a + 6b + 33c)$ は 3 の倍数であるから、 $a + b + c$ が 3 の倍数であれば、

$M + N$ は 3 の倍数となる。1～6 のうち 3 つの数の和が 3 の倍数となるような数の組み合わせは、

$$(1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 5, 6)$$

$$(2, 3, 4), (2, 4, 6), (3, 4, 5), (4, 5, 6)$$

の 8 通りが考えられ、それぞれについて 3! 通りの並べ方があるので、

$M + N$ が 3 の倍数となるカードの並べ方は、

$$8 \cdot 3! = 48 \quad (\text{通り})$$

となる。

(答) 48 通り

(2)

$$|M - N| < 200$$

$$\Leftrightarrow |(100a + 10b + c) - (a + 10b + 100c)| < 200$$

$$\Leftrightarrow |99a - 99c| < 200$$

$$\Leftrightarrow |a - c| < \frac{200}{99}$$

である。ここで、 $2 \leq \frac{200}{99}$ であり、 a, c は整数であるから、

$$a - c = -2, -1, 0, 1, 2$$

である。このような (a, c) の組は、

$$(a, c) = (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6)$$

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$$

$$(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)$$

$$(3, 1), (4, 2), (5, 3), (6, 4)$$

の 18 通りが考えられ、それぞれの組み合わせについて、 b の選び方が 4 通りずつあるから、

$|M - N| < 200$ を満たすカードの並べ方の総数は、

$$18 \cdot 4 = 72 \quad (\text{通り})$$

となる。

(答) 72 通り

[4]

(1)

C_1 について,

$$y' = 2x - 4$$

であるから, C_1 上の点 $(t, t^2 - 4t + 7)$ における接線の方程式は,

$$y = (2t - 4)(x - t) + t^2 - 4t + 7$$

$$\Leftrightarrow y = (2t - 4)x - t^2 + 7$$

とおける。これが C_2 に接するとき方程式,

$$(2t - 4)x - t^2 + 7 = -x^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(t - 2)x - t^2 + 10 = 0$$

が重解を持つので, 判別式を D とすると,

$$D/4 = (t - 2)^2 - (-t^2 + 10) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 - 4t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(t + 1)(t - 3) = 0$$

$$\therefore t = -1, 3$$

である。したがって, 求める 2 本の直線の方程式は,

$$\begin{cases} y = (-2 - 4)x - 1 + 7 \\ y = (6 - 4)x - 9 + 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -6x + 6 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -6x + 6 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \begin{cases} y = -6x + 6 \\ y = 2x - 2 \end{cases}$$

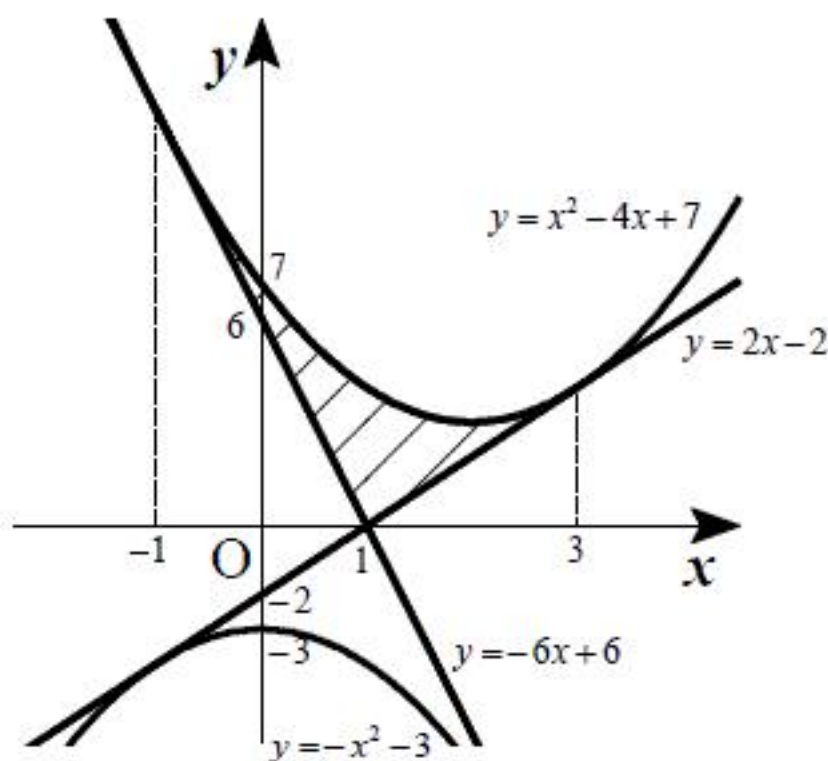
(2)

(1)で求めた 2 直線の交点の x 座標は,

$$-6x + 6 = 2x - 2$$

$$\therefore x = 1$$

であるから, 放物線 C_1 と (1)で求めた 2 直線で囲まれる部分は次図の斜線部分となる。



したがって, 図より求める面積は,

$$\int_{-1}^1 \{(x^2 - 4x + 7) - (-6x + 6)\} dx + \int_1^3 \{(x^2 - 4x + 7) - (2x - 2)\} dx$$

$$= \int_{-1}^1 (x + 1)^2 dx + \int_1^3 (x - 3)^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x + 1)^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}(x - 3)^3 \right]_1^3$$

$$= \frac{1}{3}(8 - 0) + \frac{1}{3}(0 + 8)$$

$$= \frac{16}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{16}{3}$$