

〔1〕

$y = |(x-1)(x+1)|$ について、

$$-1 < x < 1 \text{ のとき, } y = -(x-1)(x+1) = -x^2 + 1$$

$$x \leq -1, 1 \leq x \text{ のとき, } y = (x-1)(x+1) = x^2 - 1$$

である。

[1] $-1 < x < 1$ で 2 つのグラフが共有点をもつ場合

方程式、

$$ax^2 + b = -x^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (a+1)x^2 = -b+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たす $x (-1 < x < 1)$ が存在すればよい。ここで、

$$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

ならば、 $\textcircled{1}$ を満たす x は存在する。また、 $a \neq -1$ のとき、

$$x^2 = \frac{-b+1}{a+1}$$

であるから、

$$0 \leq x^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{-b+1}{a+1} < 1$$

であればよい。したがって、 $a < -1$ ならば、

$$0 \leq \frac{-b+1}{a+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -b+1 > a+1$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq b < -a$$

となり、 $a > -1$ ならば、

$$0 \leq \frac{-b+1}{a+1} < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -b+1 < a+1$$

$$\Leftrightarrow -a < b \leq 1$$

となる。したがって、

$$\text{「} a < -1 \text{ かつ } 1 \leq b < -a \text{」}$$

$$\text{または 「} a > -1 \text{ かつ } -a < b \leq 1 \text{」}$$

$$\text{または 「}(a, b) = (-1, 1) \text{」}$$

となる。

[2] $x \leq -1, 1 \leq x$ で 2 つのグラフが共有点をもつ場合

方程式、

$$ax^2 + b = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x^2 = -b-1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

を満たす $x (x \leq -1, 1 \leq x)$ が存在すればよい。ここで、

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

ならば、 $\textcircled{2}$ を満たす x は存在する。また、 $a \neq 1$ のとき、

$$x^2 = \frac{-b-1}{a-1}$$

であるから、

$$x^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-b-1}{a-1} \geq 1$$

であればよい。したがって、 $a < 1$ ならば、

$$\frac{-b-1}{a-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -b-1 \leq a-1$$

$$\Leftrightarrow b \geq -a$$

となり、 $a > 1$ ならば、

$$\frac{-b-1}{a-1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow -b-1 \geq a-1$$

$$\Leftrightarrow b \leq -a$$

となる。したがって、

$$\text{「} a < 1 \text{ かつ } b \geq -a \text{」}$$

$$\text{または 「} a > 1 \text{ かつ } b \leq -a \text{」}$$

$$\text{または 「}(a, b) = (1, -1) \text{」}$$

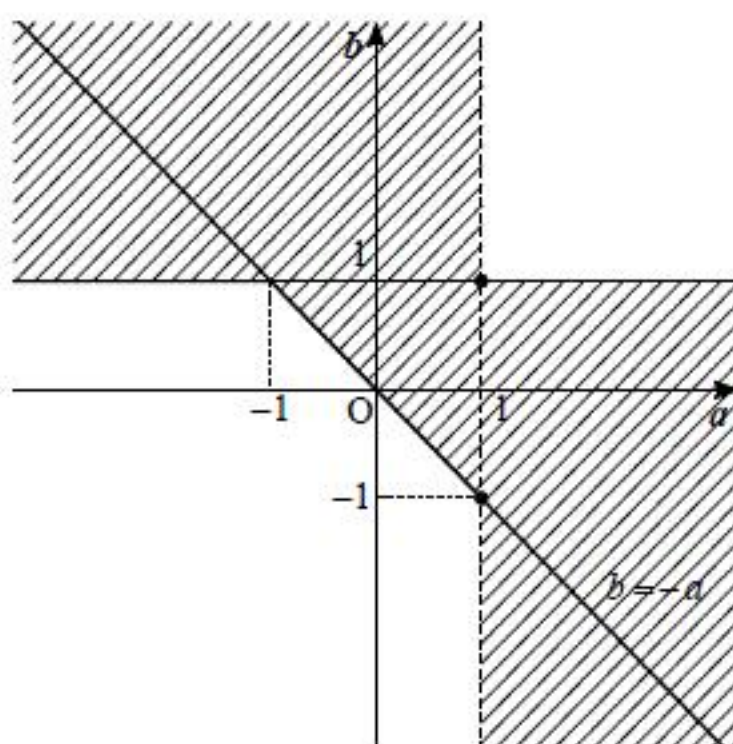
となる。

以上[1], [2]をまとめると、

$$\begin{cases} a < -1 \text{ のとき } 1 \leq b \\ -1 \leq a < 1 \text{ のとき } b \geq -a \\ a = 1 \text{ のとき } -1 \leq b \leq 1 \\ 1 < a \text{ のとき } b \leq 1 \end{cases}$$

となり、図示すると次図の斜線部分のようになる。

(ただし、境界は実線部分を含み、点線部分は含まない。)



[2]

(1)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} (x + a \cos x + a^2 \sin x)^2 dx \\ &= \int_0^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + a^4 \sin^2 x + 2ax \cos x + 2a^2 x \sin x + 2a^3 \sin x \cos x) dx \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\int_0^{\pi} x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^3}{3}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cos x dx &= [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx \\ &= 0 - [-\cos x]_0^{\pi} \\ &= -1 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \sin x dx &= -[x \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \pi + [\sin x]_0^{\pi} \\ &= \pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} (x^2 + a^2 \cos^2 x + a^4 \sin^2 x + 2ax \cos x + 2a^2 x \sin x + 2a^3 \sin x \cos x) dx \\ &= \frac{1}{3} \pi^3 + a^2 \cdot \frac{\pi}{2} + a^4 \cdot \frac{\pi}{2} + 2a \cdot (-2) + 2a^2 \pi \\ &= \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} a^2 - 4a + \frac{1}{3} \pi^3 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I = \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} a^2 - 4a + \frac{1}{3} \pi^3$$

(2)

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} a^2 - 4a + \frac{1}{3} \pi^3 \\ &= \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} \left(a - \frac{4}{5\pi} \right)^2 + \frac{8}{5\pi} \cdot \frac{5\pi^4 - 24}{24} \end{aligned}$$

である。ここで、

$$\frac{5\pi}{2} \left(a - \frac{4}{5\pi} \right)^2 \geq 0$$

であり、また $\pi > 3$ より、 $\pi^4 > 81$ であるから、

$$\frac{8}{5\pi} \cdot \frac{5\pi^4 - 24}{24} > 0$$

である。したがって、

$$I = \frac{\pi}{2} a^4 + \frac{5\pi}{2} \left(a - \frac{4}{5\pi} \right)^2 + \frac{8}{5\pi} \cdot \frac{5\pi^4 - 24}{24} > \frac{\pi}{2} a^4$$

となる。

(証明終)

〔3〕

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$

であるから、

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{p^2 - 4q}$$

である。ここで、

$$y = f(x) = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

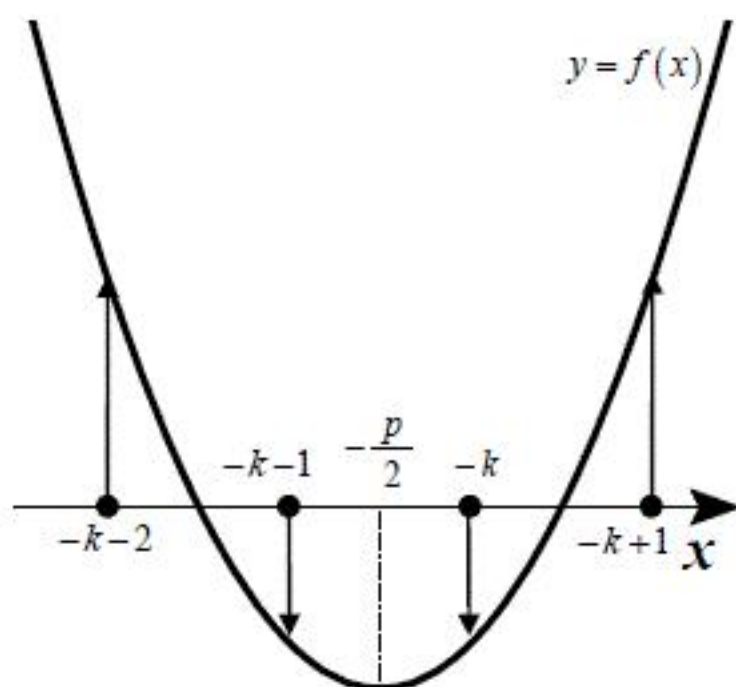
とすると、放物線 $y = f(x)$ の軸は $x = -\frac{p}{2}$ である。放物線は軸に対して線対称であるから、区

間 $[\alpha, \beta]$ に 2 つの整数が含まれるとき、 $-\frac{p}{2}$ は整数ではない。したがって、 p は奇数となる。

$p = 2k + 1$ (k は整数) とおくと、

$$-\frac{p}{2} = -k - \frac{1}{2}$$

であるから、区間 $[\alpha, \beta]$ に 2 つの整数が含まれるためには、グラフが次のようになればよい。



グラフより、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f(-k) = f(-k-1) < 0 \\ f(-k-2) = f(-k+1) > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - pk + q < 0 \\ (-k+1)^2 + p(-k+1) + q > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - (2k+1)k + q < 0 \\ (-k+1)^2 + (2k+1)(-k+1) + q > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} q < k^2 + k \\ q > k^2 + k - 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow k^2 + k - 2 < q < k^2 + k \end{aligned}$$

であり、 q は整数なので、

$$q = k^2 + k - 1$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{p^2 - 4q} \\ &= \sqrt{(2k+1)^2 - 4(k^2 + k - 1)} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\beta - \alpha = \sqrt{5}$

〔4〕

(1)

A 地点を原点とし、西から東に向かう方向に x 軸、南から北に向かう方向に y 軸をとる。

また、1 つの区間の長さを 1 とする。

このとき、 $y:0 \rightarrow 1$ と進む時に通る区間は $x=0, 1, \dots, 9$ の 10 通りがある。

同様に、 $y:1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 5$ と進む時に通る区間もそれぞれ 10 通りずつあるので、

A 地点から B 地点へ行く道順の総数は、

$$10^5 = 100000 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 100000 通り

(2)

C 地点を通る道順は次のようになる

① A 地点から $y=2$ の地点へ行く

② $y=2$ のある地点で 1 区間だけ北上し、C 地点を通った後、さらに 1 区間だけ北上する

③ $y=4$ のある地点から B 地点に行く

ここで、(1)と同様に考えると、①の道順は 10^2 通りあり、③の道順は 10 通りある。

②の道順であるが、 $y=3$ のときに C 地点を通るために、

$$\{(0, 3), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (5, 3)\} \text{ と } \{(5, 3), (6, 3), (7, 3), (8, 3), (9, 3)\}$$

の間を移動しなければならない。 $(5, 3) \rightarrow (5, 3)$ の移動が重複することを考慮すると、②の道順の総数は、

$$6 \cdot 5 + 5 \cdot 6 - 1 = 59 \text{ (通り)}$$

である。したがって、C 地点を通過して A 地点から B 地点へ行く道順の総数は、

$$10^2 \cdot 59 \cdot 10 = 59000 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 59000 通り

(3)

A 地点から B 地点まで 16 区間で行くとき、西へ n 区間進むとすると、

$$5 + 9 + 2n = 16$$

$$\Leftrightarrow n = 1$$

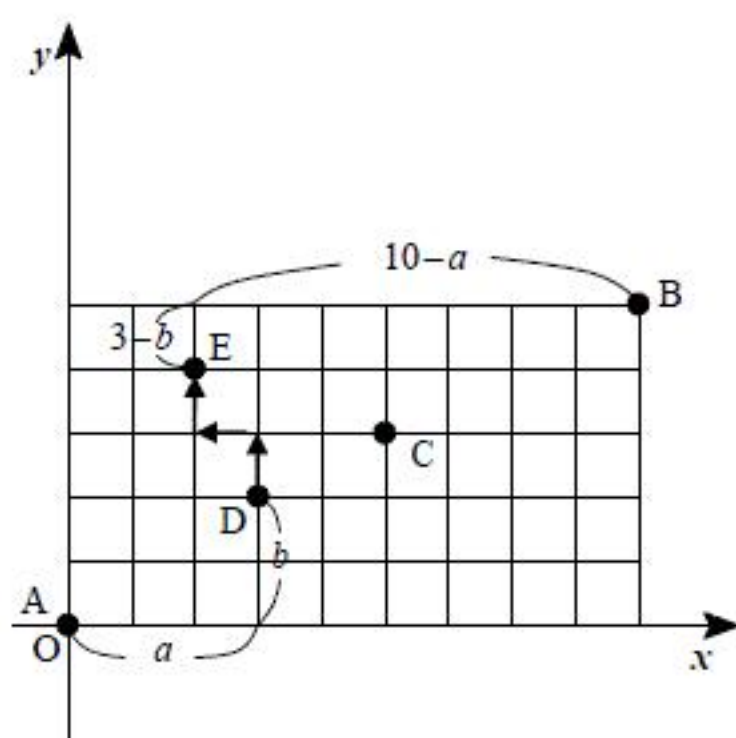
であるから、西への移動は 1 区間のみである。ここで、西への移動の前後を考えると、

北へ移動 → 西へ移動 → 北へ移動

しか考えられない。この 3 区間の移動をひとまとまりとし(*)とすると、(*)以外の部分ではすべて北または東への移動となる。A 地点から B 地点までの移動を、

A 地点 → D 地点(*)E 地点 → B 地点

と考え、次図のように a, b ($1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 3$) を定める。



このとき

A 地点から D 地点までの道順の総数は $\frac{(a+b)!}{a!b!}$ 通り

E 地点から B 地点までの道順の総数は $\frac{(13-a-b)!}{(10-a)!(3-b)!}$ 通り

である。また対称性より、 $b=0$ と $b=3$ のときの道順の総数は等しく、 $b=1$ と $b=2$ のときの道順の総数も等しいので、A 地点から B 地点まで 16 区間で行く道順の総数は、

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{a=1}^9 \left\{ \sum_{b=2}^3 \frac{(a+b)!}{a!b!} \cdot \frac{(13-a-b)!}{(10-a)!(3-b)!} \right\} \\ &= 2 \sum_{a=1}^9 \left\{ \frac{1}{2} (a+1)(a+2)(11-a) + \frac{1}{6} (a+1)(a+2)(a+3) \right\} \\ &= 2 \sum_{a=1}^9 \left\{ -\frac{1}{3} (a+1)(a+2)(a-18) \right\} \\ &= 2 \sum_{a=1}^9 \left(-\frac{1}{3} a^3 + 5a^2 + \frac{52}{3} a + 12 \right) \\ &= 2 \left\{ -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 \right)^2 + 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 19 + \frac{52}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 10 + 12 \cdot 9 \right\} \\ &= 2(-675 + 1425 + 780 + 108) \\ &= 3276 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

となる。

(答) 3276 通り