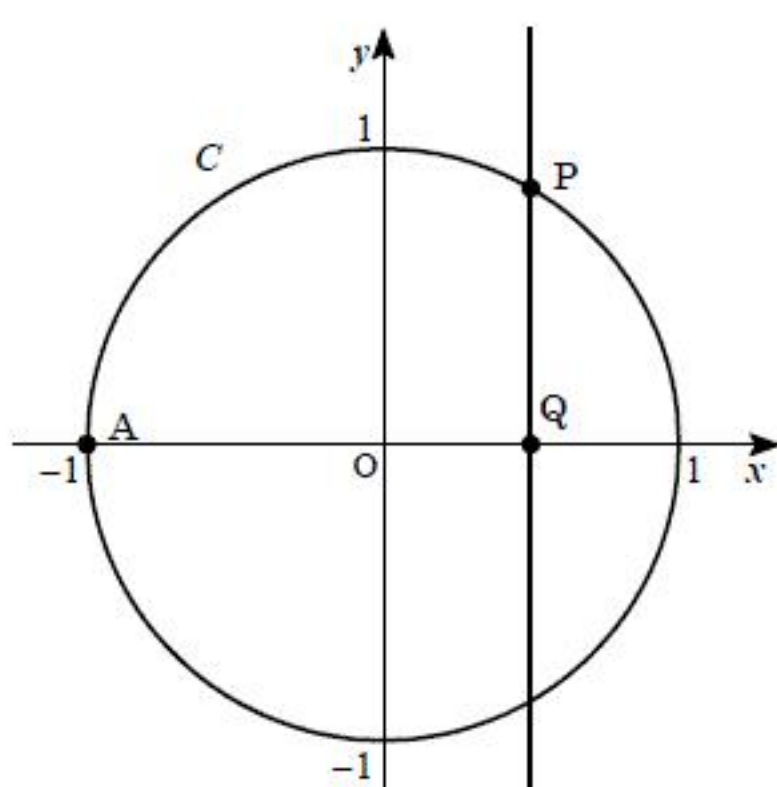


[1]

(1)



対称性より、Pが $(a, \sqrt{1-a^2})$ でも $(a, -\sqrt{1-a^2})$ でも l やAQ, PQの長さは変化しないので、

$$P(a, \sqrt{1-a^2})$$

とする。このとき、

$$Q(a, 0)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} f(a) &= AQ + PQ \\ &= a + 1 + \sqrt{1-a^2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(a) = a + 1 + \sqrt{1-a^2}$$

(2)

$-1 < a < 1$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(a) &= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{-2a}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= 1 - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1-a^2} - a}{\sqrt{1-a^2}} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} f'(a) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-a^2} - a &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{1-a^2} &= a \end{aligned}$$

と変形できる。両辺二乗して、

$$\begin{aligned} 1-a^2 &= a^2 \quad (a > 0) \\ a^2 &= \frac{1}{2} \\ \therefore a &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{Q } a > 0) \end{aligned}$$

と求まる。また、

$$\lim_{a \rightarrow -1+0} f'(a) = \infty, \quad \lim_{a \rightarrow 1-0} f'(a) = -\infty$$

であるから、 $-1 \leq a \leq 1$ における $f(a)$ の増減表は次のとおりである。

a	-1	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...	1
$f'(a)$	∞	+	0	-	$-\infty$
$f(a)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	2

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \sqrt{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

であるから、 $f(a)$ は $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値: $\sqrt{2} + 1$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{2} + 1 \quad (a = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{のとき})$$

(2)

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{\text{OP}} \right|^2 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 \\ \left| \overrightarrow{\text{OQ}} \right|^2 &= (-1)^2 + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 1 \end{aligned}$$

であり、 $\left| \overrightarrow{\text{OP}} \right| = \left| \overrightarrow{\text{OQ}} \right|$ であるから、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 1 &= 6 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 5 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{POQ} &= \frac{\overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}}}{\left| \overrightarrow{\text{OP}} \right| \left| \overrightarrow{\text{OQ}} \right|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}}{\left| \overrightarrow{\text{OP}} \right|^2} \\ &= \frac{-1 + a + 2b}{6} \end{aligned}$$

であり、 $\cos \angle \text{POQ} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{-1 + a + 2b}{6} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a + 2b &= 4 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

と求まる。②を①に代入して、

$$\begin{aligned} (4 - 2b)^2 + b^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 5b^2 - 16b + 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5b - 11)(b - 1) &= 0 \\ \therefore b &= \frac{11}{5}, 1 \end{aligned}$$

となる。

[1] $b = \frac{11}{5}$ のとき、

$$a = 4 - 2b = 4 - \frac{22}{5} = -\frac{2}{5} < 0$$

より、条件を満たす。

[2] $b = 1$ のとき、

$$a = 4 - 2b = 4 - 2 = 2 > 0$$

より、条件を満たさないので、不適である。

以上より、

$$(a, b) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad (a, b) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right)$$

(2)

$\overrightarrow{\text{OR}}$ は実数 p, q を用いて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OR}} &= p \overrightarrow{\text{OP}} + q \overrightarrow{\text{OQ}} \\ &= p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p - q \\ p - \frac{2}{5}q \\ 2p + \frac{11}{5}q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{\text{OR}} \right|^2 &= (p - q)^2 + \left(p - \frac{2}{5}q \right)^2 + \left(2p + \frac{11}{5}q \right)^2 \\ &= 6p^2 + 6pq + 6q^2 \\ &= 6(p^2 + pq + q^2) \end{aligned}$$

となるので、 $\left| \overrightarrow{\text{OP}} \right| = \left| \overrightarrow{\text{OR}} \right|$ であるから、

$$\begin{aligned} 6(p^2 + pq + q^2) &= 6 \\ \Leftrightarrow p^2 + pq + q^2 &= 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OR}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p - q \\ p - \frac{2}{5}q \\ 2p + \frac{11}{5}q \end{pmatrix} \\ &= 6p + 3q \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{POR} &= \frac{\overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OR}}}{\left| \overrightarrow{\text{OP}} \right| \left| \overrightarrow{\text{OR}} \right|} \\ &= \frac{6p + 3q}{6} \end{aligned}$$

であり、 $\cos \angle \text{POR} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{6p + 3q}{6} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 6p + 3q &= 3 \\ \Leftrightarrow 2p + q &= 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

と求まる。④を③に代入して、

$$\begin{aligned} p^2 + p(1 - 2p) + (1 - 2p)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3p^2 - 3p &= 0 \\ \Leftrightarrow 3p(p - 1) &= 0 \\ \therefore p &= 0, 1 \end{aligned}$$

となる。

[1] $p = 0$ のとき、

$$q = 1 - 2p = 1$$

となるので、

$$\text{R} \left(-1, -\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right)$$

となり、Qと一致してしまうので不適である。

[2] $p = 1$ のとき、

$$q = 1 - 2p = -1$$

となるので、

$$\text{R} \left(2, \frac{7}{5}, -\frac{1}{5} \right)$$

と求まる。

以上より、

$$\text{R} \left(2, \frac{7}{5}, -\frac{1}{5} \right)$$

なので、

$$x = 2, y = \frac{7}{5}, z = -\frac{1}{5}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad x = 2, y = \frac{7}{5}, z = -\frac{1}{5}$$

[3]

(1)

$y' = 2x$ より, l_1 と l_2 の方程式はそれぞれ,

$$\begin{aligned} l_1: y &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \\ l_2: y &= 2bx - b^2 \end{aligned}$$

であるから, l_1 と l_2 の交点は,

$$\begin{aligned} 2ax - a^2 &= 2bx - b^2 \\ 2(b-a)x &= b^2 - a^2 \\ \therefore x &= \frac{a+b}{2} \quad (Q: a \neq b) \end{aligned}$$

$$y = 2a \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 = ab$$

と求まる。したがって,

$$P\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) P\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

(2)

(1)より,

$$Q\left(\frac{a+p}{2}, ap\right), R\left(\frac{b+p}{2}, bp\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} AB^2 &= (b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2 \\ &= (b-a)^2 \{1 + (b+a)^2\} \\ QR^2 &= \left(\frac{b-p}{2} - \frac{a-p}{2}\right)^2 + (bp - ap)^2 \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^2 + p^2(b-a)^2 \\ &= (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + p^2\right) \\ &= (b-a)^2 \left\{\frac{1}{4} + \frac{(a+b)^2}{4}\right\} \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^2 \{1 + (a+b)^2\} \end{aligned}$$

と表せる。したがって,

$$\frac{AB^2}{QR^2} = \frac{(b-a)^2 \{1 + (b+a)^2\}}{\frac{1}{4}(b-a)^2 \{1 + (a+b)^2\}} = 4$$

と求まる。以上より,

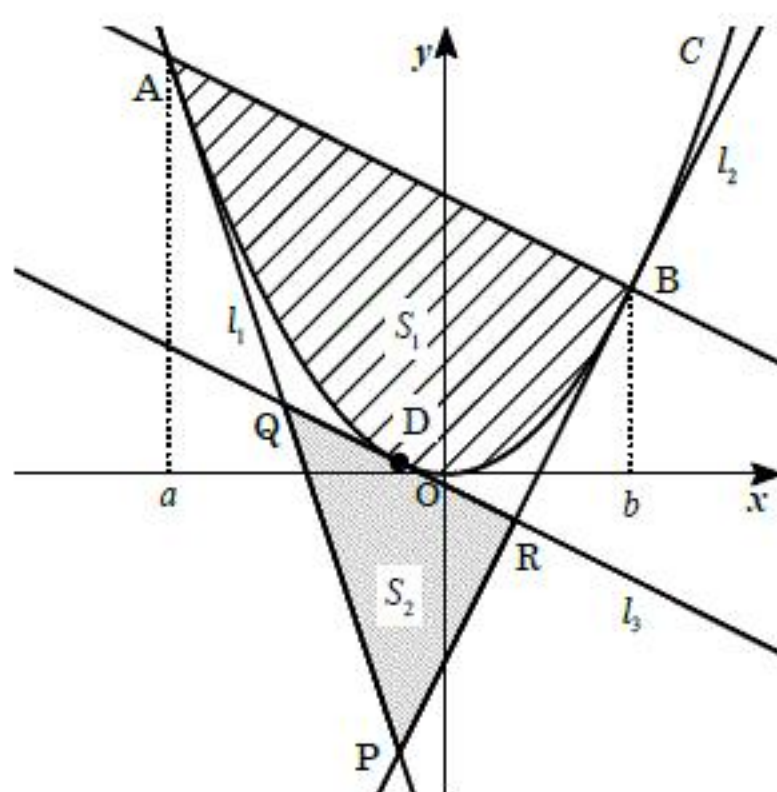
$$\frac{AB}{QR} = 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{AB}{QR} = 2$$

(3)

求める面積 S_1, S_2 はそれぞれ下図の斜線部である。



8

直線 AB の方程式は,

$$\begin{aligned} AB: y &= \frac{b^2 - a^2}{b-a}(x-a) + a^2 \\ &= (a+b)(x-a) + a^2 \\ &= (a+b)x - ab \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\} dx \\ &= -\int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 \end{aligned}$$

と求まる。また, S_2 に関しては $\triangle DPQ$ と $\triangle DPR$ に分割して求めればよいから, 点 Q , 点 R から辺 DP におろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とすると,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} DP \cdot QH_1 + \frac{1}{2} DP \cdot RH_2 \\ &= \frac{1}{2} DP (QH_1 + RH_2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - ab \right\} \left\{ \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+p}{2} \right) + \left(\frac{b+p}{2} - \frac{a+b}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4}(a-b)^2 \right\} \left\{ \frac{1}{2}(b-a) \right\} \\ &= \frac{1}{16}(b-a)^3 \end{aligned}$$

と求まる。以上より,

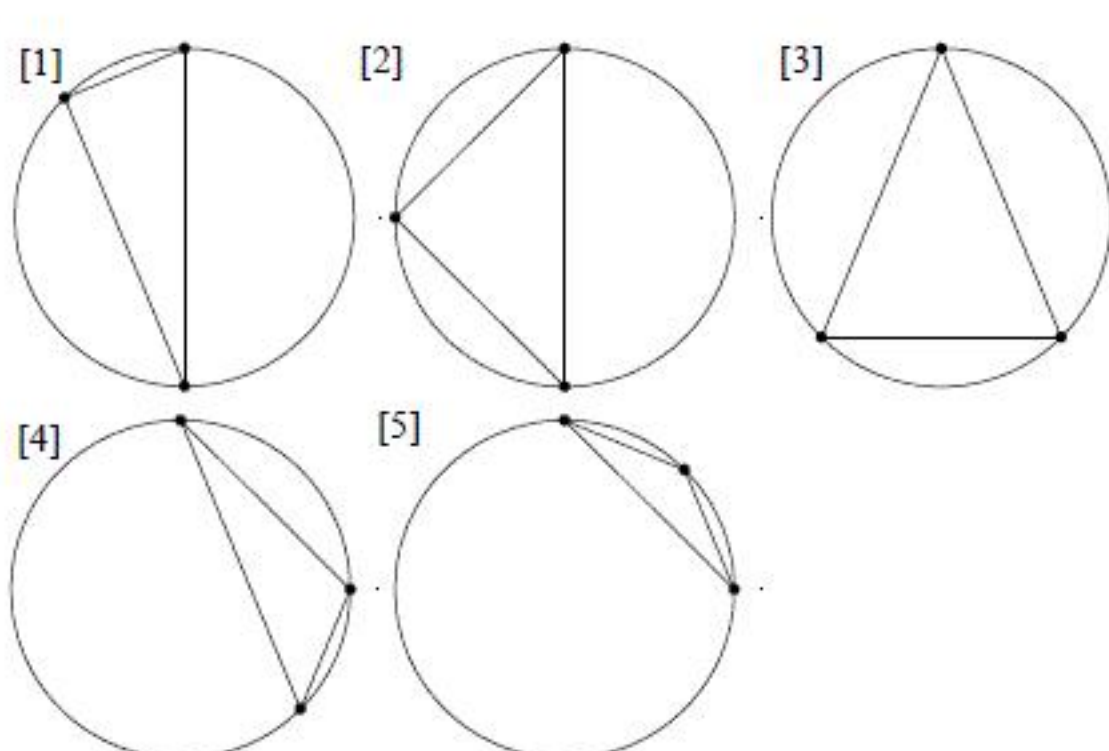
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{16}(b-a)^3}{\frac{1}{6}(b-a)^3} = \frac{3}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{3}{8}$$

[4]

(1)



の5種類である。

(答) 5種類

(2)

[i]のときの面積を S_i 、それになる場合の数を q_i とおく。それぞれの三角形の面積とそれになる場合の数を求める。

[1]のとき、

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \cdot (0 - \cos 135^\circ) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

である。また、場合の数は、隣り合う2点を選んだ後に上の形になるように点を選べばよいから、

$$q_1 = 8 \times 2 = 16 \text{ [通り]}$$

と求まる。

[2]のとき、

$$S_2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

である。また、場合の数は、2点を結んだ直線が直径となるように2点を選んだ後、上の形となるように点を選べばよいから、

$$q_2 = 4 \times 2 = 8 \text{ [通り]}$$

と求まる。

[3]のとき、

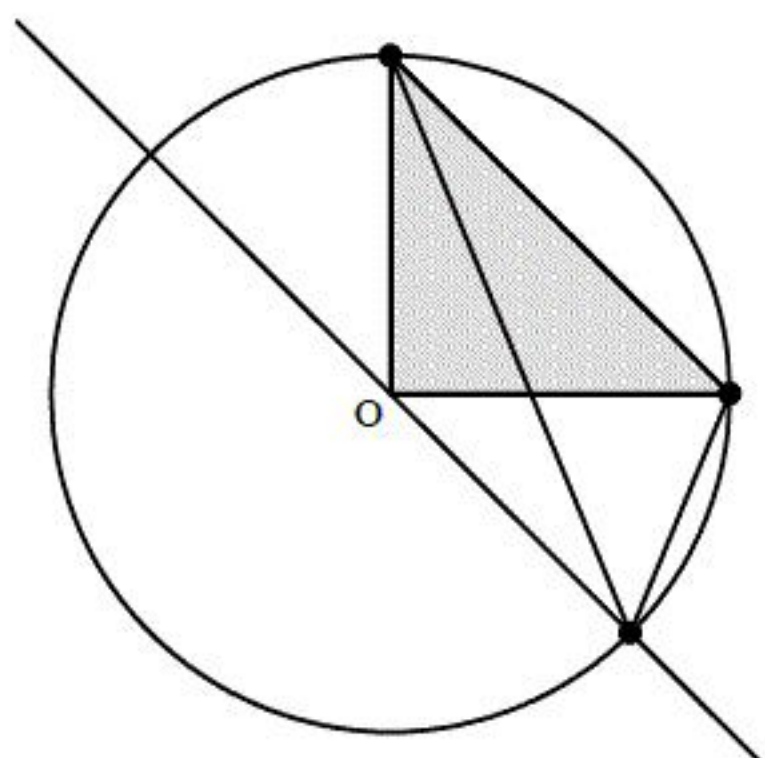
$$\begin{aligned} S_3 &= 2 \sin 45^\circ (1 + \cos 45^\circ) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{2} \end{aligned}$$

である。また、場合の数は、1点間をあけて2点を結んだ後、上の形となるように点を選べばよいから、

$$q_3 = 8 \times 1 = 8 \text{ [通り]}$$

と求まる。

[4]のとき、



求める三角形と上図の斜線部の面積は等しいから、

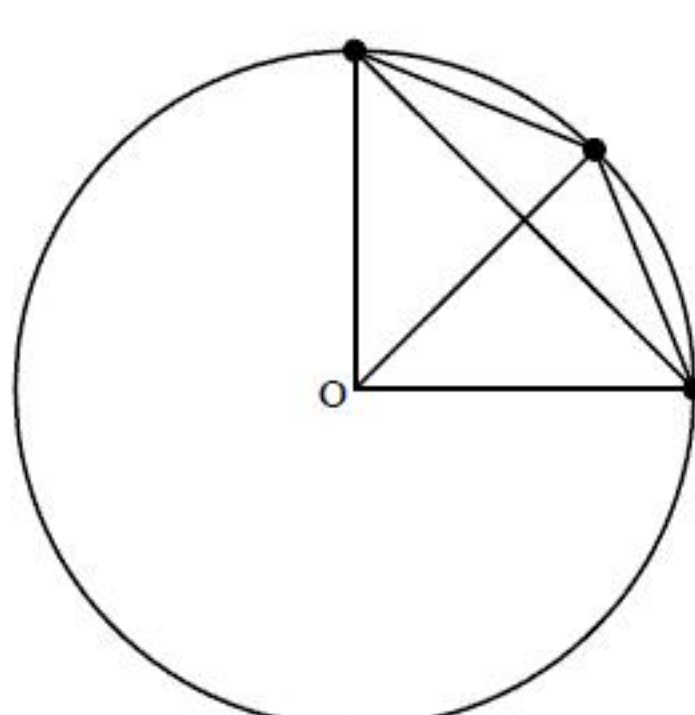
$$S_4 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

である。また、場合の数は、隣り合う2点を選んだ後に上の形になるように点を選べばよいから、

$$q_4 = 8 \times 2 = 16 \text{ [通り]}$$

と求まる。

[5]のとき、



求める面積は

$$\begin{aligned} S_5 &= \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1^2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \end{aligned}$$

である。隣り合う3点を選べばよいから、

$$q_5 = 8 \text{ [通り]}$$

と求まる。

以上より、面積が最大となるのは[3]のときで、その確率は、

$$\frac{8}{16 + 8 + 8 + 16 + 8} = \frac{1}{7}$$

であり、面積は $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ である。

(答) 確率: $\frac{1}{7}$, 面積: $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$

(3)

(2)より、求める期待値は、

$$\begin{aligned} &\frac{2}{7} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{7} \times 1 + \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{2} + 1}{2} + \frac{2}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2} + 2}{7} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{2\sqrt{2} + 2}{7}$