

[1]

(1)

$y = x^3 - 12x^2 + 25x - 10$ と $y = mx - 10$ を連立すると、

$$x^3 - 12x^2 + 25x - 10 = mx - 10$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 12x^2 + (25 - m)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x\{x^2 - 12x + (25 - m)\} = 0$$

と変形できる。曲線 C と直線 l が異なる 3 点で交わるには $x^2 - 12x + 25 - m = 0$ が $x = 0$ 以外の異なる 2 つの実数解をもてばよいから、

$$m \neq 25 \quad \text{かつ} \quad D > 0$$

となればよい。

$$D > 0$$

$$\Leftrightarrow 36 - (25 - m) > 0$$

$$\Leftrightarrow m > -11$$

であるから、求める条件は、

$$m \neq 25 \quad \text{かつ} \quad m > -11$$

である。

$$(\text{答}) \quad m \neq 25 \quad \text{かつ} \quad m > -11$$

(2)

(1)より、曲線 C と直線 l の交点の x 座標は、

$$x\{x - (6 + \sqrt{11 + m})\}\{x - (6 - \sqrt{11 + m})\} = 0$$

$$\therefore x = 0, 6 \pm \sqrt{11 + m}$$

と求まる。

[1] $-11 < m < 25$ のとき

$$0 < 6 - \sqrt{11 + m} < 6 + \sqrt{11 + m}$$

であり、点 A, B, C はすべて同一直線上にあるので

$$\begin{aligned} AB : BC &= (6 - \sqrt{11 + m}) : \{(6 + \sqrt{11 + m}) - (6 - \sqrt{11 + m})\} \\ &= (6 - \sqrt{11 + m}) : 2\sqrt{11 + m} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$AB : BC = 1 : 2$$

$$\Leftrightarrow (6 - \sqrt{11 + m}) : 2\sqrt{11 + m} = 1 : 2$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{11 + m}$$

$$\Leftrightarrow 9 = 11 + m$$

$$\therefore m = -2$$

と求まる。これは $-11 < m < 25$ を満たす。

[2] $m > 25$ のとき

$$6 - \sqrt{11 + m} < 0 < 6 + \sqrt{11 + m}$$

であり、点 A, B, C はすべて同一直線上にあるので

$$\begin{aligned} AB : BC &= \{0 - (6 - \sqrt{11 + m})\} : (6 + \sqrt{11 + m}) \\ &= (-6 + \sqrt{11 + m}) : (6 + \sqrt{11 + m}) \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$AB : BC = 1 : 2$$

$$\Leftrightarrow (-6 + \sqrt{11 + m}) : (6 + \sqrt{11 + m}) = 1 : 2$$

$$\Leftrightarrow 18 = \sqrt{11 + m}$$

$$\Leftrightarrow 324 = 11 + m$$

$$\therefore m = 313$$

と求まる。これは $m > 25$ を満たす。

以上[1], [2]より、求める値は

$$m = -2, 313$$

である。

$$(\text{答}) \quad m = -2, 313$$

[2]

(1)

$$\begin{aligned} |\overline{\text{OP}}|^2 &= 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6 \\ |\overline{\text{OQ}}|^2 &= (-1)^2 + a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 1 \end{aligned}$$

であり、 $|\overline{\text{OP}}| = |\overline{\text{OQ}}|$ であるから、

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + 1 &= 6 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 &= 5 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{POQ} &= \frac{\overline{\text{OP}} \cdot \overline{\text{OQ}}}{|\overline{\text{OP}}| |\overline{\text{OQ}}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}}{|\overline{\text{OP}}|^2} \\ &= \frac{-1 + a + 2b}{6} \end{aligned}$$

であり、 $\cos \angle \text{POQ} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{-1 + a + 2b}{6} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a + 2b &= 4 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

と求まる。②を①に代入して、

$$\begin{aligned} (4 - 2b)^2 + b^2 &= 5 \\ \Leftrightarrow 5b^2 - 16b + 11 &= 0 \\ \Leftrightarrow (5b - 11)(b - 1) &= 0 \\ \therefore b &= \frac{11}{5}, 1 \end{aligned}$$

となる。

[1] $b = \frac{11}{5}$ のとき、

$$a = 4 - 2b = 4 - \frac{22}{5} = -\frac{2}{5} < 0$$

より、条件を満たす。

[2] $b = 1$ のとき、

$$a = 4 - 2b = 4 - 2 = 2 > 0$$

より、条件を満たさないので、不適である。

以上より、

$$(a, b) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right)$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad (a, b) = \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right)$$

(2)

$\overline{\text{OR}}$ は実数 p, q を用いて、

$$\begin{aligned} \overline{\text{OR}} &= p \overline{\text{OP}} + q \overline{\text{OQ}} \\ &= p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{2}{5} \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p - q \\ p - \frac{2}{5}q \\ 2p + \frac{11}{5}q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。

$$\begin{aligned} |\overline{\text{OR}}|^2 &= (p - q)^2 + \left(p - \frac{2}{5}q \right)^2 + \left(2p + \frac{11}{5}q \right)^2 \\ &= 6p^2 + 6pq + 6q^2 \\ &= 6(p^2 + pq + q^2) \end{aligned}$$

となるので、 $|\overline{\text{OP}}| = |\overline{\text{OR}}|$ であるから、

$$\begin{aligned} 6(p^2 + pq + q^2) &= 6 \\ \Leftrightarrow p^2 + pq + q^2 &= 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{3}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} \overline{\text{OP}} \cdot \overline{\text{OR}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p - q \\ p - \frac{2}{5}q \\ 2p + \frac{11}{5}q \end{pmatrix} \\ &= 6p + 3q \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \cos \angle \text{POR} &= \frac{\overline{\text{OP}} \cdot \overline{\text{OR}}}{|\overline{\text{OP}}| |\overline{\text{OR}}|} \\ &= \frac{6p + 3q}{6} \end{aligned}$$

であり、 $\cos \angle \text{POR} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{6p + 3q}{6} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 6p + 3q &= 3 \\ \Leftrightarrow 2p + q &= 1 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{4}$$

と求まる。④を③に代入して、

$$\begin{aligned} p^2 + p(1 - 2p) + (1 - 2p)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow 3p^2 - 3p &= 0 \\ \Leftrightarrow 3p(p - 1) &= 0 \\ \therefore p &= 0, 1 \end{aligned}$$

となる。

[1] $p = 0$ のとき、

$$q = 1 - 2p = 1$$

となるので、

$$\text{R} \left(-1, -\frac{2}{5}, \frac{11}{5} \right)$$

となり、Q と一致してしまうので不適である。

[2] $p = 1$ のとき、

$$q = 1 - 2p = -1$$

となるので、

$$\text{R} \left(2, \frac{7}{5}, -\frac{1}{5} \right)$$

と求まる。

以上より、

$$\text{R} \left(2, \frac{7}{5}, -\frac{1}{5} \right)$$

なので、

$$x = 2, y = \frac{7}{5}, z = -\frac{1}{5}$$

と求まる。

$$\text{(答)} \quad x = 2, y = \frac{7}{5}, z = -\frac{1}{5}$$

[3]

(1)

$y' = 2x$ より, l_1 と l_2 の方程式はそれぞれ,

$$\begin{aligned} l_1: y &= 2a(x-a) + a^2 \\ &= 2ax - a^2 \\ l_2: y &= 2bx - b^2 \end{aligned}$$

であるから, l_1 と l_2 の交点は,

$$\begin{aligned} 2ax - a^2 &= 2bx - b^2 \\ 2(b-a)x &= b^2 - a^2 \\ \therefore x &= \frac{a+b}{2} \quad (\because a \neq b) \end{aligned}$$

$$y = 2a \cdot \frac{a+b}{2} - a^2 = ab$$

と求まる。したがって,

$$P\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) P\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$$

(2)

(1)より,

$$Q\left(\frac{a+p}{2}, ap\right), R\left(\frac{b+p}{2}, bp\right)$$

であるから,

$$\begin{aligned} AB^2 &= (b-a)^2 + (b^2-a^2)^2 \\ &= (b-a)^2 \{1 + (b+a)^2\} \\ QR^2 &= \left(\frac{b-p}{2} - \frac{a-p}{2}\right)^2 + (bp-ap)^2 \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^2 + p^2(b-a)^2 \\ &= (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} + p^2\right) \\ &= (b-a)^2 \left\{\frac{1}{4} + \frac{(a+b)^2}{4}\right\} \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^2 \{1 + (a+b)^2\} \end{aligned}$$

と表せる。したがって,

$$\frac{AB^2}{QR^2} = \frac{(b-a)^2 \{1 + (b+a)^2\}}{\frac{1}{4}(b-a)^2 \{1 + (a+b)^2\}} = 4$$

と求まる。以上より,

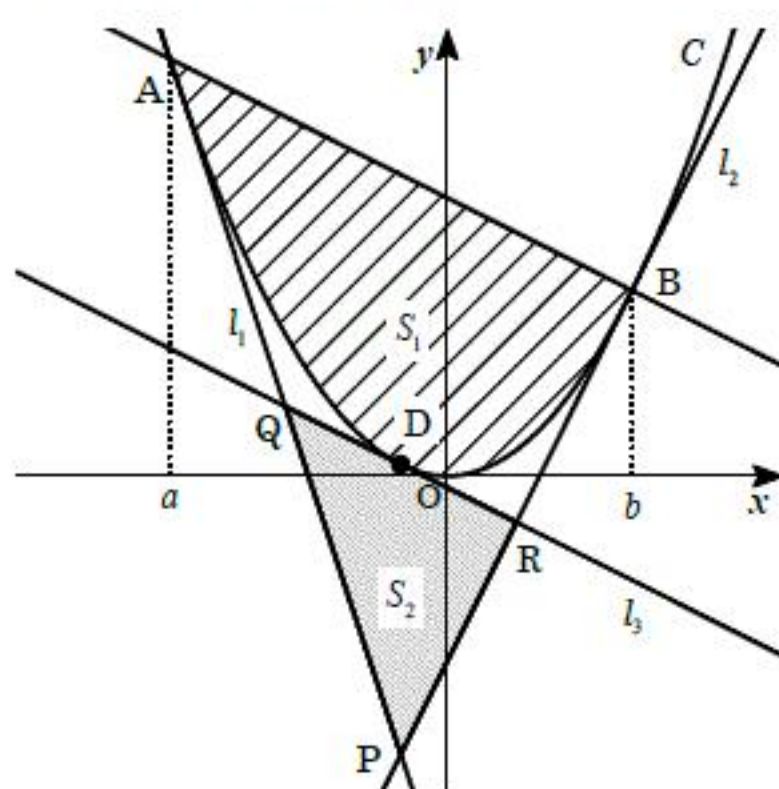
$$\frac{AB}{QR} = 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{AB}{QR} = 2$$

(3)

求める面積 S_1, S_2 はそれぞれ下図の斜線部である。



8

直線 AB の方程式は,

$$\begin{aligned} AB: y &= \frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a) + a^2 \\ &= (a+b)(x-a) + a^2 \\ &= (a+b)x - ab \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_a^b \{(a+b)x - ab - x^2\} dx \\ &= -\int_a^b (x-a)(x-b) dx \\ &= \frac{1}{6}(b-a)^3 \end{aligned}$$

と求まる。また, S_2 に関しては $\triangle DPQ$ と $\triangle DPR$ に分割して求めればよいから, 点 Q , 点 R から辺 DP におろした垂線の足をそれぞれ H_1, H_2 とすると,

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} DP \cdot QH_1 + \frac{1}{2} DP \cdot RH_2 \\ &= \frac{1}{2} DP (QH_1 + RH_2) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 - ab \right\} \left\{ \left(\frac{a+b}{2} - \frac{a+p}{2} \right) + \left(\frac{b+p}{2} - \frac{a+b}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{4} (a^2 - 2ab + b^2) \right\} \left\{ \frac{1}{2} (b-a) \right\} \\ &= \frac{1}{16} (b-a)^3 \end{aligned}$$

と求まる。以上より,

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{1}{16}(b-a)^3}{\frac{1}{6}(b-a)^3} = \frac{3}{8}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{3}{8}$$

[4]

(1)

a, b, c を小さい順に並べ替えたものを x, y, z とする。

得点が 7 となるのは (ウ) のときのみである。したがって、得点が 7 となるのは、

$$(x, y, z) = (1, 2, 4)$$

のときであるから、このようになる場合の数は

$$3! = 6 \text{ [通り]}$$

である。全事象は、

$$4^3 = 64 \text{ [通り]}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{6}{64} = \frac{3}{32}$$

である。

(答) $\frac{3}{32}$

(2)

得点が 10 以下となるのは、(ア)、(イ)、(ウ) のすべてであり得る。

[1] (ア) で 10 以下となるとき

$$(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

であるから、(ア) で 10 以下となる確率は、

$$\frac{1}{64}$$

である。

[2] (イ) で 10 以下となるとき

$$(x, y, z) = (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 2)$$

であるから、(イ) で 10 以下となる確率は、

$$\frac{{}_3C_1}{64} \times 3 = \frac{9}{64}$$

である。

[3] (ウ) で 10 以下となるとき

(ウ) のときのすべての場合で、

$$(x, y, z) = (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)$$

であるから、(ウ) で 10 以下となる確率は、

$$\frac{3}{32} \times 4 = \frac{3}{8}$$

である。

以上より、求める確率は、

$$\frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{3}{8} = \frac{34}{64} = \frac{17}{32}$$

である。

(答) $\frac{17}{32}$

(3)

(ア) となる (x, y, z) の組み合わせは、

$$(x, y, z) = (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4)$$

であり、(イ) となる (x, y, z) の組み合わせは、

$$\begin{aligned} (x, y, z) = & (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 2), \\ & (1, 3, 3), (1, 4, 4), (2, 2, 3), (2, 2, 4) \\ & (2, 3, 3), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (3, 4, 4) \end{aligned}$$

であり、(ウ) となる (x, y, z) の組み合わせは、

$$(x, y, z) = (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)$$

である。

よって、(2) の過程より、求める期待値は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{64} \times (3 + 6 + 9 + 12) \times 3 + \frac{{}_3C_1}{64} \times (4 + 5 + 6 + 5 + 7 + 9 + 7 + 8 + 8 + 10 + 10 + 11) \times 2 \\ & \quad + \frac{3}{32} \times (6 + 7 + 8 + 9) \\ & = \frac{1}{64} \times 90 + \frac{3}{64} \times 180 + \frac{3}{32} \times 30 \\ & = \frac{810}{64} \\ & = \frac{405}{32} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{405}{32}$