

〔1〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 15x + 36) \\ &= -(x-3)(x-12) \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)(x-12) &< 0 \\ \therefore 3 < x < 12 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $3 < x < 12$

(2)

真数条件より

$$\begin{aligned} f(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow 3 < x < 12 \end{aligned}$$

である。 $\log_2(-x^2 + 15x - 36)$ が最大となるとき、 $-x^2 + 15x - 36$ も最大となるので、 $3 < x < 12$

において $f(x)$ が最大となるときの値を求めれば、 $g(x)$ の最大値が分かる。

$$-x^2 + 15x - 36 = -\left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + \frac{81}{4}$$

であるから、 $f(x)$ は $x = \frac{15}{2}$ のとき、最大値 $\frac{81}{4}$ をとる。したがって、 $g(x)$ の最大値は、

$$\begin{aligned} g\left(\frac{15}{2}\right) &= \log_2 \frac{81}{4} \\ &= \log_2 81 - \log_2 4 \\ &= 4 \log_2 3 - 2 \\ &= 4 \cdot 1.585 - 2 \\ &= 4.340 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 4.340

(3)

(1)より、

$$\begin{aligned} f(g(x)) &> 0 \\ \Leftrightarrow 3 < g(x) < 12 \\ \Leftrightarrow 3 < \log_2(-x^2 + 15x - 36) < 12 \\ \Leftrightarrow 2^3 < -x^2 + 15x - 36 < 2^{12} \\ \Leftrightarrow 8 < -x^2 + 15x - 36 < 4096 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 15x + 44 < 0 \\ x^2 - 15x + 4132 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x-11) < 0 \\ \left(x - \frac{15}{2}\right)^2 + 4132 - \frac{225}{4} > 0 \end{cases} \\ \therefore 4 < x < 11 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $4 < x < 11$

[3]

(1)

$$A\left(a, \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2}\right), B\left(b, \frac{1}{2}b^2 - b + \frac{3}{2}\right)$$

より,

$$p = \frac{a+b}{2}$$

$$\therefore a+b=2p \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また,

$$\begin{aligned} AB^2 &= (b-a)^2 + \left\{ \left(\frac{1}{2}b^2 - b + \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \right) \right\}^2 \\ &= (b-a)^2 + \left\{ \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - (b-a) \right\}^2 \\ &= (b-a)^2 + (b-a)^2 \left\{ \frac{1}{2}(b+a) - 1 \right\}^2 \\ &= (b-a)^2 + (b-a)^2 (p-1)^2 \quad (\because b+a=2p) \\ &= (b-a)^2 \{ (p-1)^2 + 1 \} \\ &= \{ (a+b)^2 - 4ab \} \{ (p-1)^2 + 1 \} \end{aligned}$$

と求まる。 $AB=2, (p-1)^2+1>0$ より,

$$\begin{aligned} 4 &= \{ (a+b)^2 - 4ab \} \{ (p-1)^2 + 1 \} \\ (a+b)^2 - 4ab &= \frac{4}{(p-1)^2 + 1} \\ 4ab &= (a+b)^2 - \frac{4}{(p-1)^2 + 1} \\ 4ab &= 4p^2 - \frac{4}{(p-1)^2 + 1} \\ \therefore ab &= p^2 - \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a+b=2p, \quad ab=p^2 - \frac{1}{(p-1)^2 + 1}$$

(2)

P の y 座標を q とすると,

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{1}{2}b^2 - b + \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}(a+b) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{4} \{ (a+b)^2 - 2ab \} - \frac{1}{2}(a+b) + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 4p^2 - 2 \left(p^2 - \frac{1}{(p-1)^2 + 1} \right) \right\} - p + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p-1)^2 + 1} + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}p^2 - p + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(p-1)^2 + 1} + \frac{3}{2}$$

(3)

(2)より,

$$y=f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2+1}+\frac{3}{2}$$

である。

$$f(x)-\left(\frac{1}{2}x^2-x+\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2+1}>0$$

であるから, 求める面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \left\{ f(x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2 + 1} dx \end{aligned}$$

と変形できる。 $x-1=\tan\theta$ とおくと,

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow 2 \\ \hline \theta & -\frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{\pi}{4} \end{array}$$

であるから,

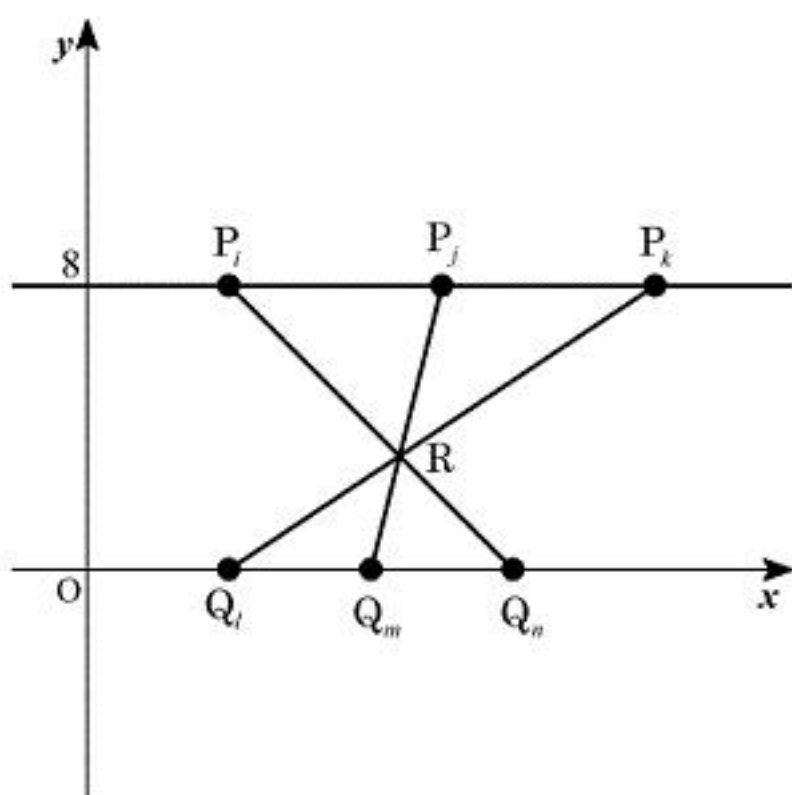
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{4}$$

[4]

(1)



$R(s, t)$ とおくと、 $y=0$ と $y=8$ は平行であるから、錯角は等しいので、

$$\begin{aligned} \angle RPP_j &= \angle RQ_nQ_m, \angle RP_jP_i = \angle RQ_mQ_n, \\ \angle RP_jP_k &= \angle RQ_mQ_l, \angle RP_kP_j = \angle RQ_lQ_m \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \triangle RPP_j &\sim \triangle RQ_nQ_m, \\ \triangle RP_jP_k &\sim \triangle RQ_mQ_l \end{aligned}$$

と分かる。 $R(s, t)$ であるから、

$$\begin{aligned} PP_j : Q_nQ_m &= 8-t : t \\ \Leftrightarrow \frac{PP_j}{Q_mQ_n} &= \frac{8-t}{t} \\ PP_k : Q_mQ_l &= 8-t : t \\ \Leftrightarrow \frac{Q_lQ_m}{PP_k} &= \frac{t}{8-t} \end{aligned}$$

と求まる。以上より、

$$\frac{PP_j \cdot Q_lQ_m}{PP_k \cdot Q_mQ_n} = \frac{8-t}{t} \cdot \frac{t}{8-t} = 1$$

と求まる。

(答) $\frac{PP_j \cdot Q_lQ_m}{PP_k \cdot Q_mQ_n} = 1$

(2)

$P_i, Q_l (1 \leq i \leq 5)$ の x 座標が 2^i のとき、3本の線分 P_iQ_n, P_jQ_m, P_kQ_l が1点で交わるとする。このとき、

$$\begin{aligned} \frac{PP_j \cdot Q_lQ_m}{PP_k \cdot Q_mQ_n} &= \frac{(2^j - 2^i)(2^m - 2^l)}{(2^k - 2^j)(2^n - 2^m)} \\ &= \frac{(1 - 2^{i-j})(1 - 2^{l-m})}{(2^{k-j} - 1)(2^{n-m} - 1)} \end{aligned}$$

と表せる。 $i < j < k, l < m < n$ であるから、

$$\begin{aligned} 0 < 1 - 2^{i-j} < 1, 0 < 1 - 2^{l-m} < 1, \\ 2^{k-j} - 1 \geq 1, 2^{n-m} - 1 \geq 1 \end{aligned}$$

である。したがって、

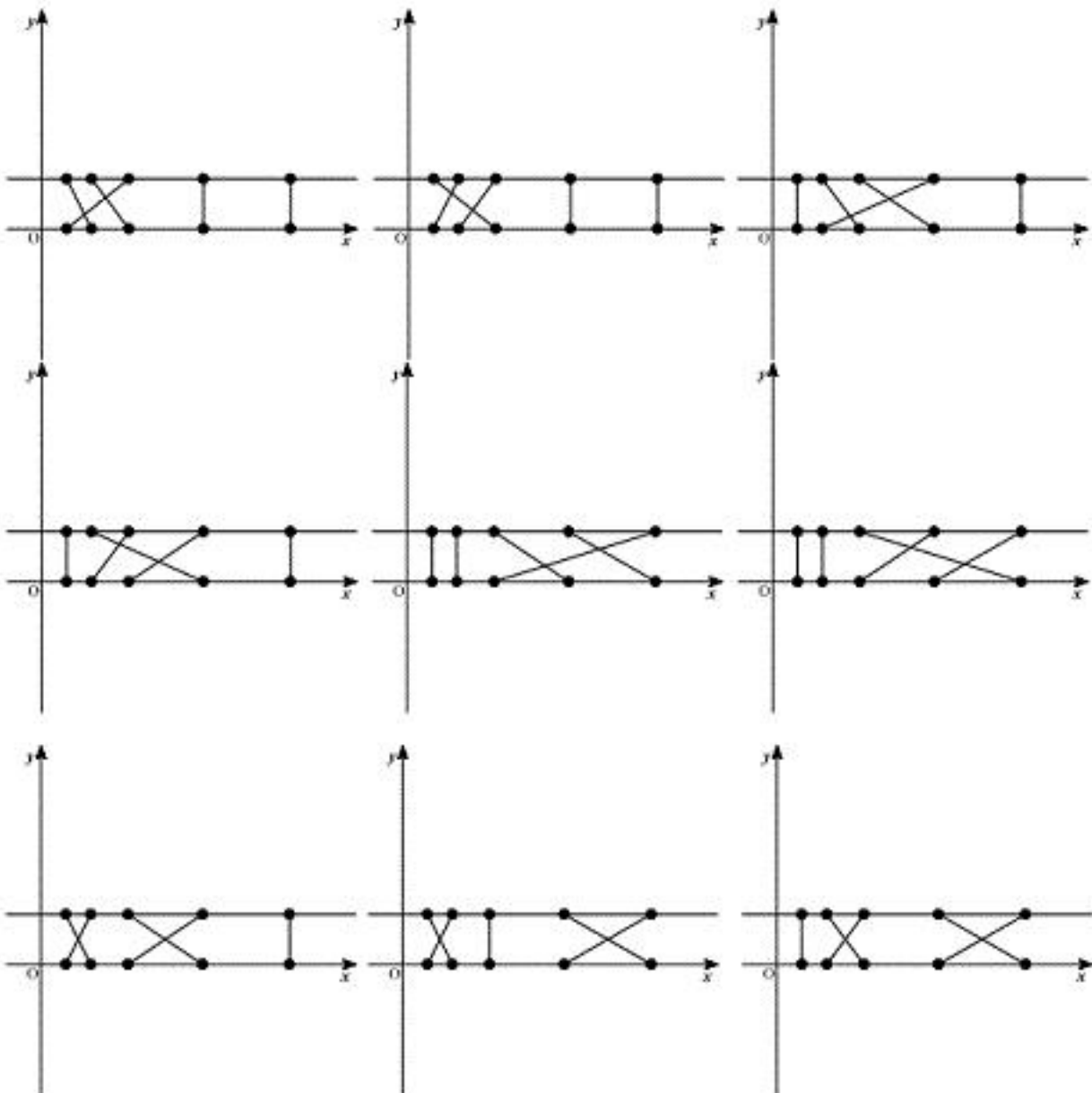
$$\frac{PP_j \cdot Q_lQ_m}{PP_k \cdot Q_mQ_n} < 1$$

となる。これは(1)と矛盾する。以上より、どのような結び方をして3本の線分が1点で交わらない。

(証明終)

(3)

(2)より、3本が同時に交わることはない。2本で交わるような組み合わせは下記の通りである。



よって、9通りである。

(答) 9通り