

[1]

(1)

それぞれの関数に $x=2$ を代入すると、

$$\frac{x^2+1}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$x=2$$

$$\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$\frac{x^2-1}{2\log x} = \frac{3}{2\log 2}$$

となる。ここで、 $\log 2 = 0.693\dots$ より、 $\frac{2}{3} < \log 2 < \frac{3}{4}$ であるため、

$$2 < \frac{3}{2\log 2} < \frac{9}{4} = 2.25$$

となる。したがって、

$$\frac{2x^2}{x^2+1} < x < \frac{x^2-1}{2\log x} < \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 < \frac{x^2+1}{2}$$

と決定できる。

$$(答) \quad \frac{2x^2}{x^2+1} < x < \frac{x^2-1}{2\log x} < \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 < \frac{x^2+1}{2}$$

(2)

$x > 0$ かつ $x \neq 1$ であるとき、不等式 $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 < \frac{x^2+1}{2}$ が成立することを示す。

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{2} - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 &= \frac{x^2+1-2x}{4} \\ &= \frac{(x-1)^2}{4} \end{aligned}$$

であるため、 $x \neq 1$ より

$$\begin{aligned} \frac{x^2+1}{2} - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 &> 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 &< \frac{x^2+1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(3)

$x > 0$ かつ $x \neq 1$ であるとき、不等式 $x < \frac{x^2-1}{2\log x}$ が成立することを示す。(2)と同様に、関数

$$\frac{x^2-1}{2\log x} - x = \frac{x^2-1-2x\log x}{2\log x}$$

を調べる。ここで $f(x) = x^2 - 1 - 2x\log x$ とおくと、

$$f'(x) = 2x - 2\log x - 2$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$$

となるため、 $x > 0$ における $f'(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	1	...
$f''(x)$		-	0	+
$f'(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

上記の増減表より、 $x \neq 1$ のとき $f'(x) > 0$ となる。よって、 $f(x)$ は単調増加である。また $f(1) = 0$ であるため、

$$x > 1 \text{ において、} f(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \text{ において、} f(x) < 0$$

となる。さらに、

$$x > 1 \text{ において、} \log x > 0$$

$$0 < x < 1 \text{ において、} \log x < 0$$

であるため、 $x > 0$ かつ $x \neq 1$ の範囲において、

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{2\log x} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-1-2x\log x}{2\log x} &> 0 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\frac{x^2-1}{2\log x} > x$ が示された。

(証明終)

【2】

(1)

与えられた等式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

より、連立方程式

$$\begin{cases} 2+3y=x \\ 3+5y=xy \end{cases}$$

が成り立つ。上式を下式に代入すると、

$$\begin{aligned} 3+5y &= (2+3y)y \\ \Leftrightarrow y^2 - y - 1 &= 0 \\ \therefore y &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。 $y_1 < y_2$ より、

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} x_1 &= 2+3y_1 \\ &= 2+3 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ x_2 &= 2+3y_2 \\ &= 2+3 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x_1, y_1) = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right), (x_2, y_2) = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

(2)

等式

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たす定数 α, β を求める。(1)より、次の連立方程式

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \alpha + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \beta = 2 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、上式より

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \alpha + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \beta = 2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

となるため、

$$\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

と求まり、 $\alpha + \beta = 2$ より、

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - \frac{5+\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{5}, \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$u_n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

とおくと、(1)より

$$\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} (\because (1)) \\ &= x_1 u_{n-1} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} u_n &= x_1^{n-1} u_1 \\ &= x_1^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} (\because (1)) \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \alpha x_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta x_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1^n + \beta x_2^n \\ \alpha x_1^n y_1 + \beta x_2^n y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha x_1^n y_1 + \beta x_2^n y_2}{\alpha x_1^n + \beta x_2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n y_1 + \beta y_2}{\alpha \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n + \beta} \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)より、 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$ であるため、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[3]

(1)

まず、点Pの x 座標を求める。2曲線の式を連立して、 y を消去すると

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+1} &= \frac{x^2}{2} \\ \Leftrightarrow 2x &= x^4 + x^2 \\ \Leftrightarrow x(x^3 + x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-1)(x^2 + x + 2) &= 0\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

であり、また、点Pは原点と異なるため、求める x 座標は1となる。よって、点Pの座標は

$\left(1, \frac{1}{2}\right)$ となる。

(答) $P\left(1, \frac{1}{2}\right)$

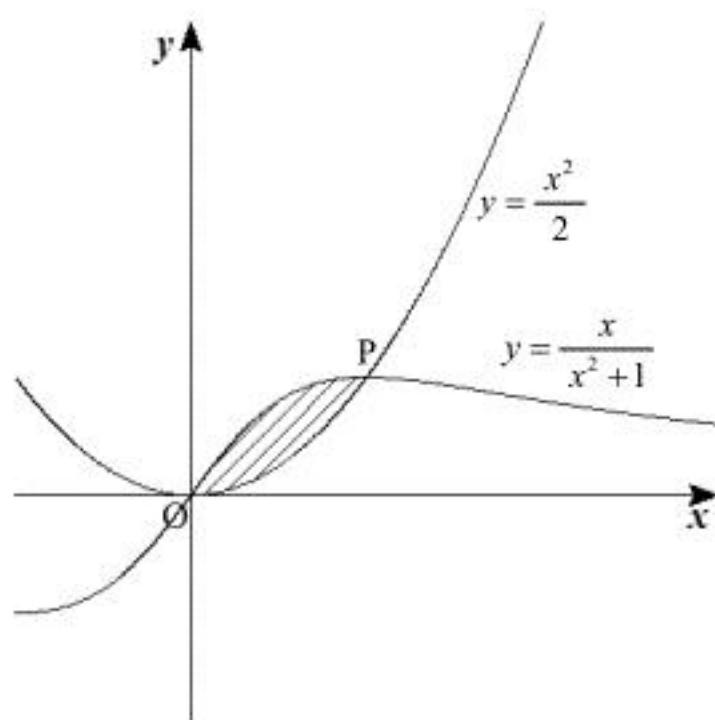
(2)

(1)より、

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2+1} - \frac{x^2}{2} &= \frac{2x - x^2(x^2+1)}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{-x(x-1)(x^2+x+1)}{2(x^2+1)}\end{aligned}$$

であるため、 $0 < x < 1$ のとき、曲線 $y = \frac{x}{x^2+1}$ は放物線 $y = \frac{x^2}{2}$ の上側にあり、 $x < 0$ または $1 < x$

のとき、曲線 $y = \frac{x}{x^2+1}$ は放物線 $y = \frac{x^2}{2}$ の下側にある。領域 D は下図の通りである。



したがって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \log(x^2+1) - \frac{x^3}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{6}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{6}$

(3)

求める部分の体積を V とおく。(2)より、 $0 < x < 1$ において

$$\frac{x}{x^2+1} > \frac{x^2}{2} > 0$$

であるため、求める体積 V は

$$V = \pi \int_0^1 \left\{ \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right\} dx$$

となる。まず、

$$\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^2 dx$$

を求める。 $x = \tan \theta$ と置換すると、 x と θ の対応関係は

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

であるため、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} \right)^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 dx &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^4 dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{20}\end{aligned}$$

であるため、求める体積は

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^1 \left\{ \left(\frac{x}{x^2+1} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 \right\} dx \\ &= \pi \left\{ \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{20} \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{3}{10} \pi\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi^2}{8} - \frac{3}{10} \pi$

[4]

(1)

3回の試行でPが原点の位置にくるのは、5以上の目が2回出て4以下の目が1回出るときであるため、求める確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

となる。

(答) $\frac{2}{9}$

(2)

6回の試行でPが原点の位置にくるのは、5以上の目が4回出て4以下の目が2回出るときであるため、この確率は

$${}_6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243}$$

となる。よって求める確率は、(1)と合わせて、

$$\frac{2}{9} + \frac{20}{243} = \frac{40}{2187}$$

となる。

(答) $\frac{40}{2187}$

(3)

n を自然数、 s を0以上 n 以下の整数とすると、 n 回の試行で5以上の目が s 回出て4以下の目が $(n-s)$ 回出たとすると、点Pは

$$s - 2(n-s) = 3s - 2n$$

の位置にくる。点Pが原点に位置するとき、

$$3s - 2n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2n = 3s$$

をみたすため、 n は3の倍数となる必要がある。よって、9回の試行で3, 6, 9回目のいずれかのみ、点Pは原点の位置にくる場合がある。点Pが3, 6, 9回目の全てにおいて原点にくる確率は、(1)より

$$\left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}$$

となるため、求める確率は、(2)と合わせて、

$$\frac{40}{2187} + \frac{8}{729} = \frac{16}{2187}$$

となる。

(答) $\frac{16}{2187}$