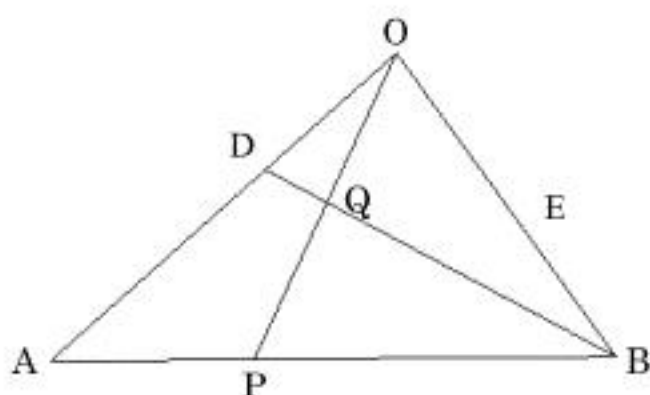


〔1〕

(1)



題意より、 $AP:PB=t:(1-t)$ であるため、

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

(2)

$$\overrightarrow{OD}=\frac{3}{7}\vec{a}=\vec{d} \text{ とおくと,}$$

$$\overrightarrow{OP}=\frac{7}{3}(1-t)\vec{d}+t\vec{b}$$

となる。また、 $\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OP}$ とおけるため、

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{7}{3}s(1-t)\vec{d}+st\vec{b} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで点 Q は BD 上にあるため、

$$\frac{7}{3}s(1-t)+st=1$$

が成り立つ。よって

$$s=\frac{3}{7-4t}$$

である。これを①に代入すると、 $\vec{d}=\frac{3}{7}\vec{a}$ より

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3(1-t)}{7-4t}\vec{a}+\frac{3t}{7-4t}\vec{b}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{OQ}=\frac{3(1-t)}{7-4t}\vec{a}+\frac{3t}{7-4t}\vec{b}$

(3)

$$\overrightarrow{OE}=\frac{2}{3}\vec{b}=\vec{e} \text{ おくと}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{3(1-t)}{7-4t}\vec{a}+\frac{3t}{7-4t}\cdot\frac{3}{2}\vec{e}$$

となる。点 Q が直線 AE 上にあるとき、(2)と同様に

$$\frac{3(1-t)}{7-4t}+\frac{3t}{7-4t}\cdot\frac{3}{2}=1$$

が成り立つ。この方程式を解くと、

$$t=\frac{8}{11}$$

となる。これは問題の条件 $0<t<1$ を満たす。

(答) $t=\frac{8}{11}$

〔2〕

(1)

与えられた漸化式より,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1}{4a_1+5} \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

と求まる。この漸化式を繰り返し使うことによって,

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{\frac{1}{6}+5} \cdot \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{124} \\ a_4 &= \frac{1}{\frac{1}{31}+5} \cdot \frac{1}{124} \\ &= \frac{1}{624} \end{aligned}$$

と順々に求まる。

$$(\text{答}) \quad a_2 = \frac{1}{24}, a_3 = \frac{1}{124}, a_4 = \frac{1}{624}$$

(2)

漸化式 $a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n+5}$ より,

$$a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0 \quad (n \geq 1)$$

となる。 $a_1 = \frac{1}{4} > 0$ であるため、数学的帰納法より、すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ とな

る。よって、与えられた漸化式の両辺の逆数をとることができ、

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{5}{a_n} + 4$$

となる。したがって、 $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、

$$b_{n+1} = 5b_n + 4$$

が成り立つ。

(証明終)

(3)

まず数列 $\{b_n\}$ の一般項を求める。(2)より $b_{n+1} = 5b_n + 4$ が成り立つため、これを变形すると、

$$b_{n+1} + 1 = 5(b_n + 1)$$

となる。よって、

$$b_n + 1 = 5^{n-1} (b_1 + 1)$$

であり、 $b_1 + 1 = \frac{1}{a_1} + 1 = 5$ より、

$$\begin{aligned} b_n &= 5^{n-1} \cdot 5 - 1 \\ &= 5^n - 1 \end{aligned}$$

と求まる。したがって、数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = \frac{1}{5^n - 1}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{1}{5^n - 1}$$

[3]

(1)

$s=2$ のとき、今年 2 万円、来年 $(6-2)+(6-2) \cdot \frac{1}{2} + 27 = 33$ 万円を黄金の購入に使うため、満足度は

$$\begin{aligned} f &= 2^2 \cdot 33 \\ &= 132 \end{aligned}$$

となる。また、 $s=8$ のとき、今年 8 万円、来年 $27-(8-6)-(8-6) \cdot \frac{1}{2} = 24$ 万円を黄金の購入に使うため、満足度は

$$\begin{aligned} f &= 8^2 \cdot 24 \\ &= 1536 \end{aligned}$$

となる。

(答) $s=2$ のとき $f=132$ 、 $s=8$ のとき $f=1536$

(2)

[1] $0 \leq s \leq 6$ のとき

$$\begin{aligned} t &= (6-s) + (6-s) \cdot \frac{1}{2} + 27 \\ &= 36 - \frac{3}{2}s \end{aligned}$$

となる。

[2] $6 < s \leq 24$ のとき

$$\begin{aligned} t &= 27 - (s-6) - (s-6) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 36 - \frac{3}{2}s \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2] より,

$$t = 36 - \frac{3}{2}s$$

となる。

(答) $t = 36 - \frac{3}{2}s$ ($0 \leq s \leq 24$)

(3)

(2)より、満足度 f を s のみの式で表すと

$$\begin{aligned} f &= s^2 t \\ &= s^2 \left(36 - \frac{3}{2}s \right) \\ &= -\frac{3}{2}(s^3 - 24s^2) \end{aligned}$$

となる。これを s について微分すると

$$\begin{aligned} f' &= -\frac{3}{2}(3s^2 - 48s) \\ &= -\frac{9}{2}s(s-16) \end{aligned}$$

となるため、 f の増減表は以下の表の通りである。

s	0	...	16	...	24
f'	0	+	0	-	
f	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	0

上表より、 f を最大にする s は $s=16$ である。

(答) $s=16$

[4]

(1)

3回の試行でPが原点の位置にくるのは、5以上の目が2回出て4以下の目が1回出るときであるため、求める確率は

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{9}$$

となる。

(答) $\frac{2}{9}$

(2)

6回の試行でPが原点の位置にくるのは、5以上の目が4回出て4以下の目が2回出るときであるため、この確率は

$${}_6C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{243}$$

となる。よって求める確率は、(1)と合わせて、

$$\frac{2}{9} + \frac{20}{243} = \frac{40}{2187}$$

となる。

(答) $\frac{40}{2187}$

(3)

n を自然数、 s を0以上 n 以下の整数とすると、 n 回の試行で5以上の目が s 回出て4以下の目が $(n-s)$ 回出たとすると、点Pは

$$s - 2(n-s) = 3s - 2n$$

の位置にくる。点Pが原点に位置するとき、

$$3s - 2n = 0$$

$$\Leftrightarrow 2n = 3s$$

をみたすため、 n は3の倍数となることが必要である。よって、9回の試行で3, 6, 9回目のいずれかのみ、点Pは原点の位置にくる場合がある。点Pが3, 6, 9回目の全てにおいて原点にくる確率は、(1)より

$$\left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}$$

となるため、求める確率は、(2)と合わせて、

$$\frac{40}{2187} + \frac{8}{729} = \frac{16}{2187}$$

となる。

(答) $\frac{16}{2187}$