

【1】

(1)

与えられた等式

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$$

より、連立方程式

$$\begin{cases} 2+3y=x \\ 3+5y=xy \end{cases}$$

が成り立つ。上式を下式に代入すると、

$$\begin{aligned} 3+5y &= (2+3y)y \\ \Leftrightarrow y^2 - y - 1 &= 0 \\ \therefore y &= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。 $y_1 < y_2$ より、

$$y_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} x_1 &= 2+3y_1 \\ &= 2+3 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \\ x_2 &= 2+3y_2 \\ &= 2+3 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ &= \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x_1, y_1) = \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right), (x_2, y_2) = \left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

(2)

等式

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

を満たす定数 α, β を求める。(1)より、次の連立方程式

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \alpha + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \beta = 2 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、上式より

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \alpha + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \beta = 2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)$$

となるため、

$$\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

と求まり、 $\alpha + \beta = 2$ より、

$$\begin{aligned} \alpha &= 2 - \frac{5+\sqrt{5}}{5} \\ &= \frac{5-\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{5}, \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{5}$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$u_n = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

とおくと、(1)より

$$\begin{aligned} u_n &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} (\because (1)) \\ &= x_1 u_{n-1} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} u_n &= x_1^{n-1} u_1 \\ &= x_1^{n-1} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ &= x_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} (\because (1)) \end{aligned}$$

となる。同様にして、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} = x_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

となる。これより、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= \alpha x_1^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta x_2^n \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha x_1^n + \beta x_2^n \\ \alpha x_1^n y_1 + \beta x_2^n y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha x_1^n y_1 + \beta x_2^n y_2}{\alpha x_1^n + \beta x_2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n y_1 + \beta y_2}{\alpha \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^n + \beta} \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)より、 $0 < \frac{x_1}{x_2} < 1$ であるため、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = y_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

[2]

(1)

$h(x)=f(x)-g(x)$ とおき、 $0< x < \frac{\pi}{2}$ において $h(x)>0$ であることを示す。 $h(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(\pi-2x)-x \cdot (-2)}{(\pi-2x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{4}{(\pi-2x)^2} \\ &= \frac{(\pi-2x)^2 - 4\cos^2 x}{(\pi-2x)^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{4\left(\frac{\pi}{2}-x-\cos x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x+\cos x\right)}{(\pi-2x)^2 \cos^2 x} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$I(x)=\frac{\pi}{2}-x-\cos x$$

とおくと、 $0< x < \frac{\pi}{2}$ において、

$$I'(x)=-1+\sin x < 0$$

となる。よって、 $I(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$
$I'(x)$		-	0
$I(x)$		$\searrow$	0

したがって、 $0< x < \frac{\pi}{2}$ において $I(x)>0$ となる。また、 $0< x < \frac{\pi}{2}$ において $\frac{\pi}{2}-x>0$ であり、かつ、 $\cos x>0$ であるため、

$$\frac{\pi}{2}-x+\cos x > 0$$

となる。よって

$$\left(\frac{\pi}{2}-x-\cos x\right)\left(\frac{\pi}{2}-x+\cos x\right)>0$$

となるため、したがって

$$h'(x)>0$$

である。よって、関数 $h(x)$ は狭義単調増加であるため、 $0< x < \frac{\pi}{2}$ において、

$$h(x)>h(0)=0$$

となる。したがって、

$$f(x)>g(x)$$

である。

(証明終)

(2)

(1)より

$$S(a)=\int_0^a\left(\tan x-\frac{4x}{\pi(\pi-2x)}\right)dx$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \left(\tan x - \frac{4x}{\pi(\pi-2x)} \right) dx \\ &= \int_0^a \left\{ -\frac{(\cos x)'}{\cos x} + \frac{2}{\pi} + \frac{(\pi-2x)'}{\pi-2x} \right\} dx \\ &= \left[-\log|\cos x| + \frac{2}{\pi}x + \log|\pi-2x| \right]_0^a \\ &= \log\left|\frac{\pi-2a}{\cos a}\right| + \frac{2}{\pi}a - \log\pi \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \log\left|\frac{\pi-2a}{\cos a}\right| &= \lim_{\frac{\pi}{2}-a \rightarrow +0} \log\left|2 \cdot \frac{\frac{\pi}{2}-a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}\right| \\ &= \log 2 \end{aligned}$$

であるため、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} S(a) &= \lim_{a \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\log\left|\frac{\pi-2a}{\cos a}\right| + \frac{2}{\pi}a - \log\pi \right) \\ &= \log 2 + 1 - \log\pi \\ &= 1 - \log\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $1-\log\frac{\pi}{2}$

(3)

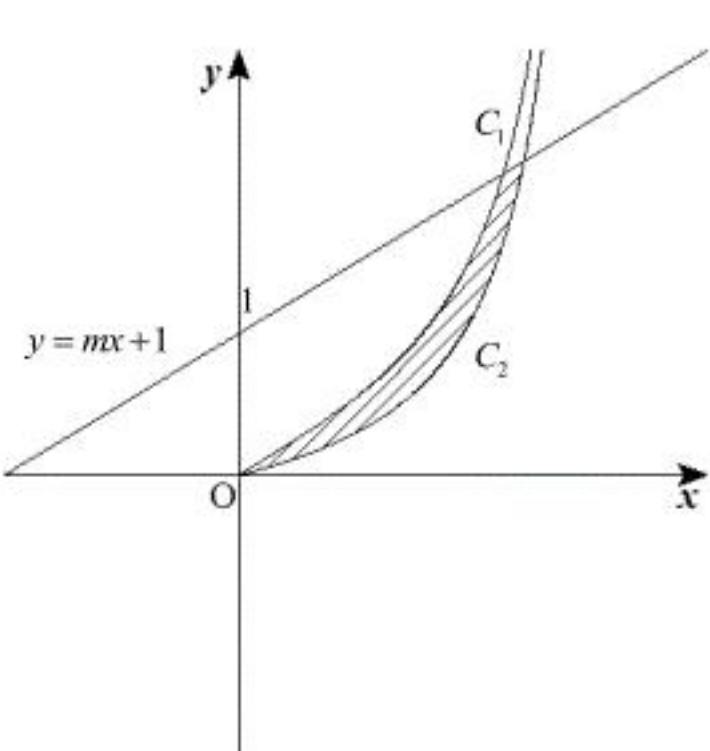
曲線 $C_1: y=f(x)=\tan x \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$ は狭義単調増加かつ下に凸である。また、

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2} \\ g''(x) &= \frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3} \end{aligned}$$

であるため、曲線 $C_2: y=g(x)=\frac{4x}{\pi(\pi-2x)} \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$ も狭義単調増加かつ下に凸である。さらに、

$$\begin{aligned} f(0) &= g(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} g(x) = \infty \end{aligned}$$

であり、ここで(1)も考慮すれば、曲線 C_1, C_2 の概形と位置関係は以下の図のようになる。



よって、直線 $y=mx+1$ と曲線 C_1, C_2 はそれぞれただ一つの交点をもつ。この交点の x 座標をそれぞれ x_1, x_2 とする。 $m>0$ のとき、上図より

$$\frac{\pi}{4} < x_1 < \frac{\pi}{2}$$

であるため、 $m \rightarrow \infty$ のとき x_1 が満たす関係式

$$\tan x_1 = mx_1 + 1$$

の右辺は正の無限大に発散する。したがって、 $m \rightarrow \infty$ のとき、

$$x_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$$

となる。さらに、上図より $x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ であるため、 $m \rightarrow \infty$ のとき、

$$x_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}-0$$

となる。ここで、(2)の記号を用いると、

$$S(x_1) < T(m) < S(x_2)$$

となるが、(2)の結果を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} S(x_1) &= \lim_{x_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} S(x_1) = 1 - \log\frac{\pi}{2} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} S(x_2) &= \lim_{x_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} S(x_2) = 1 - \log\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

であるため、はさみうちの原理より

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T(m) = 1 - \log\frac{\pi}{2}$$

となる。

(答) $1-\log\frac{\pi}{2}$

[3]

(1)

$\overrightarrow{PQ} = (c-a, d-b)$ であり、直線 l_0 の方向ベクトルの1つに $\vec{l} = (3, -1)$ がある。ここで、点Pと点Qが直線 l_0 に関して対称であるとき、直線PQは直線 l_0 と垂直であるため、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{l} &= 0 \\ \Leftrightarrow (c-a) \cdot 3 + (d-b) \cdot (-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow 3c-d &= 3a-b\end{aligned}$$

を満たし、また、点Pと点Qの中点が直線 l_0 上に位置するため、

$$\begin{aligned}\frac{a+c}{2} + 3\left(\frac{b+d}{2}\right) &= 6 \\ \Leftrightarrow c+3d &= -a-3b+12\end{aligned}$$

を満たす。以上より、 a, b を用いて c, d を表すと

$$\begin{aligned}\begin{cases} 3c-d=3a-b \\ c+3d=-a-3b+12 \end{cases} \\ \Leftrightarrow c = \frac{4a-3b+6}{5}, d = \frac{-3a-4b+18}{5}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{4a-3b+6}{5}, d = \frac{-3a-4b+18}{5}$$

(2)

点P(X, Y), Q(s, t)とおく。点Pを放物線 $C_0: y = x^2 - 1$ 上の点Qの直線 l_0 に関して対称な点とする。このとき、 $t = s^2 - 1$ が成り立ち、また、(1)において、 $a = X, b = Y, c = s, d = t$ と置くことで、

$$s = \frac{4X-3Y+6}{5}, t = \frac{-3X-4Y+18}{5}$$

が成り立つため、 X, Y について

$$\begin{aligned}\frac{-3X-4Y+18}{5} &= \left(\frac{4X-3Y+6}{5}\right)^2 - 1 \\ \therefore 9Y^2 - 8(3X+2)Y + 16X^2 + 63X - 79 &= 0\end{aligned}$$

が成り立つ。この等式より、条件を満たす点Pは曲線 $9y^2 - 8(3x+2)y + 16x^2 + 63x - 79 = 0$ 上にある。逆に、曲線 $9y^2 - 8(3x+2)y + 16x^2 + 63x - 79 = 0$ 上にある任意の点Pは条件を満たす。したがって、放物線 C_1 の方程式は

$$9y^2 - 8(3x+2)y + 16x^2 + 63x - 79 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。ここで、 y に関する2次方程式①の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= 16(3x+2)^2 - 9(16x^2 + 63x - 79) \\ &= -375\left(x - \frac{31}{15}\right)\end{aligned}$$

となる。以下、 (x, y) が①を満たすとき、実数 x の取りうる値の範囲を求める。 (x, y) が①を満たすとき、①を満たす実数 y が存在するため、 $D \geq 0$ が必要十分条件となる。よって、

$$\begin{aligned}D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -375\left(x - \frac{31}{15}\right) &\geq 0 \\ \therefore x &\leq \frac{31}{15}\end{aligned}$$

となるため、放物線 C_1 上の点のうち x 座標が最大となる点の x 座標は

$$x = \frac{31}{15}$$

である。このとき、 y に関する2次方程式①は重解を持つため、 y 座標は

$$\begin{aligned}y &= \frac{4}{9}(3x+2) \\ &= \frac{164}{45}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{31}{15}, \frac{164}{45}\right)$$

(3)

放物線は軸に関して対称な図形であるため、ある直線に関して折り返す変換は適当な回転変換と平行移動の合成で表せる。よって、本問においては xy 平面において合同な放物線の回転移動または平行移動の合成変換しか考えていない。したがって、平行移動したら合同になる放物線を同一視すれば、放物線の軸に平行な単位ベクトルで頂点から焦点へ向きをもつものを対応させることによって、放物線と xy 平面上の単位ベクトルは1:1に対応する。この対応によって、

$$\begin{aligned}C_0 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ C_2 &\leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と対応する。次に、 C_1 に対応する単位ベクトルを求める。

$$C_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

とおくと、このベクトルと C_0 に対応するベクトルの和

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v+1 \end{pmatrix}$$

は直線 l_0 に平行であるため、

$$\begin{cases} u = -3(v+1) & (u \neq 0) \\ u^2 + v^2 = 1 \end{cases}$$

を満たす。この連立方程式を解くと、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

となる。また、このベクトルと C_2 に対応するベクトルの和

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{8}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

は直線 l_1 に平行であるため、求める直線 l_1 の方程式は

$$\begin{aligned}y &= \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{8}{5}} \\ &= \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{1}{2}x$$

[4]

(1)

数列 $\{a_n\}$ は $a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ で定められており、また、 $1 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$ が成り立つため、

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1, a_4 = 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, a_4 = 2$$

(2)

k を自然数とすると、 $(k-1)^2 \leq m \leq k^2 - 1$ において、 $a_m = k-1$ となるため、

$$\begin{aligned} \sum_{m=(k-1)^2}^{k^2-1} a_m &= \sum_{m=(k-1)^2}^{k^2-1} (k-1) \\ &= (k-1) \{k^2 - 1 - (k-1)^2 + 1\} \\ &= (k-1)(2k-1) \end{aligned}$$

である。よって、 i を $(i-1)^2 \leq n \leq i^2 - 1$ を満たす自然数とすると、 $a_n = i-1$ であるため、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} \left(\sum_{m=(k-1)^2}^{k^2-1} a_m \right) + \sum_{k=(i-1)^2}^n a_k \quad (\because a_0 = 0) \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} (k-1)(2k-1) + \sum_{k=(i-1)^2}^n a_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^{i-1} k^2 - 3 \sum_{k=1}^{i-1} k + \sum_{k=1}^{i-1} 1 + \sum_{k=(i-1)^2}^n a_n \\ &= 2 \cdot \frac{1}{6} (i-1)i(2i-1) - 3 \cdot \frac{1}{2} (i-1)i + (i-1) + \{n - (i-1)^2 + 1\} a_n \\ &= (n+1)a_n - (i-1)^2 a_n + \frac{2}{3} (i-1)^3 - \frac{1}{2} (i-1)^2 - \frac{1}{6} (i-1) \\ &= (n+1)a_n - a_n^2 \cdot a_n + \frac{2}{3} a_n^3 - \frac{1}{2} a_n^2 - \frac{1}{6} a_n \quad (\because a_n = i-1) \\ &= \left(n + \frac{5}{6} \right) a_n - \frac{1}{2} a_n^2 - \frac{1}{3} a_n^3 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)