

[1]

(1)

2倍角の公式より,

$$\tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2 \tan \frac{\pi}{2^{n+2}}}{1 - \tan^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}}$$
$$\Leftrightarrow a_n = \frac{2a_{n+1}}{1 - a_{n+1}^2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{2a_{n+1}}{1 - a_{n+1}^2}$$

(2)

(1)で得られた漸化式を変形すると, $a_n = \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} \neq 0$, $a_{n+1} = \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} \neq 0$ であるから,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2}{1 - a_{n+1}^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 - a_{n+1}^2}{2}$$
$$= \frac{1 - \tan^2 \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2}$$

となるため,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 - \tan^2 0}{2}$$
$$= \frac{1 - 0}{2}$$
$$= \frac{1}{2}$$

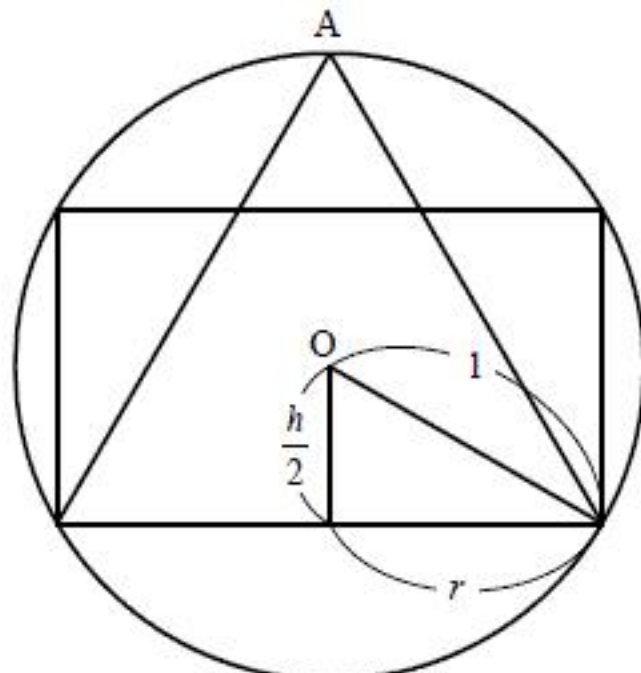
となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2}$$

[2]

(1)

球の中心および直円錐 F の頂点を含む平面で与えられた立体を切断した場合の断面図は以下のようになる。直円錐 F の頂点を A 、球の中心を O 、円柱 E の底面の半径を r とした。



前図より、

$$r = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

となり、直円錐 F の高さは

$$\frac{h}{2} + OA = 1 + \frac{h}{2}$$

となる。

(答) 半径: $\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2}\right)^2}$, 高さ: $1 + \frac{h}{2}$

(2)

半径1の球に内接する円柱の体積は

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &= \pi h \left(1 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) \\ &= -\frac{\pi}{4} h^3 + \pi h \end{aligned}$$

となる。 $f(h) = -\frac{\pi}{4} h^3 + \pi h$ ($0 < h < 2$) とすると、

$$\begin{aligned} f'(h) &= -\frac{3}{4} \pi h^2 + \pi \\ &= -\frac{3}{4} \pi \left(h^2 - \frac{4}{3}\right) \\ &= -\frac{3}{4} \pi \left(h - \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \left(h + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

となるため、 $f(h)$ の増減表は次のようになる。

h	0	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	...	2
$f'(h)$		+	0	-	
$f(h)$		↗	極大	↘	

増減表より、半径1の球に内接する円柱の体積は $h = \frac{2}{\sqrt{3}}$ のときに最大値

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{8}{3\sqrt{3}} + \pi \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}} \pi \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9} \pi \end{aligned}$$

をとる。

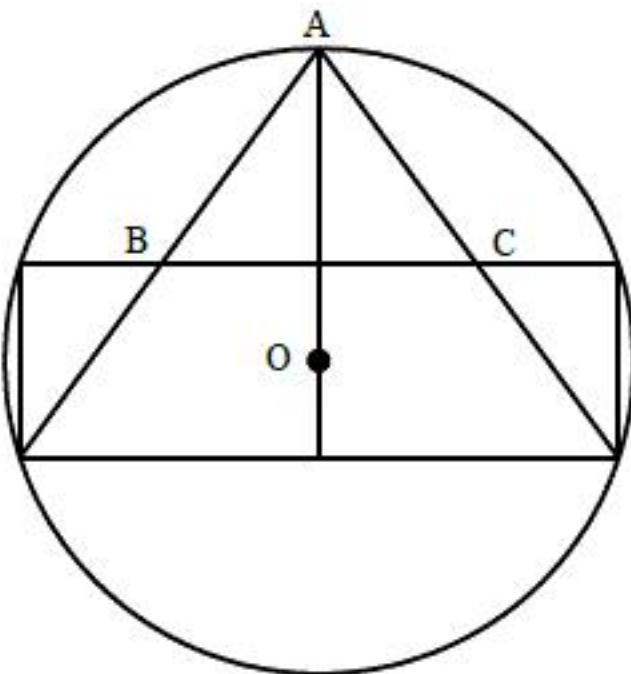
(答) $\frac{4\sqrt{3}}{9} \pi$

3)

円柱 E と直円錐 F の体積が等しいため、

$$\begin{aligned} \pi r^2 h &= \pi r^2 \left(1 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow h &= \left(1 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{6} h &= \frac{1}{3} \\ \therefore h &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

となる。また、球の中心および直円錐 F の頂点を含む平面で立体を切断した場合の断面図において、点 B, C を以下の図のようにおく。



このとき、

$$\begin{aligned} BC &= 2r \cdot \left(\frac{1 - \frac{h}{2}}{1 + \frac{h}{2}}\right) \\ &= 2r \cdot \frac{\frac{4}{6}}{\frac{5}{5}} \\ &= \frac{4}{3} r \end{aligned}$$

となる。したがって、直円錐 F の体積と、円柱 E と直円錐 F が重なっている部分の体積の比は、

$$(2r)^3 : \left\{ (2r)^3 - \left(\frac{4}{3}r\right)^3 \right\} = 8 : \frac{152}{27}$$

$$= 27 : 19$$

となる。以上より、求める体積は、

$$\begin{aligned} \pi r^2 h - \pi r^2 \left(1 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{19}{27} &= \pi r^2 h \left(1 - \frac{19}{27}\right) \left(\because \pi r^2 h = \pi r^2 \left(1 + \frac{h}{2}\right) \cdot \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{8}{27} \pi r^2 h \\ &= \frac{8}{27} \pi \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2\right) \cdot \frac{2}{5} \\ &= \frac{128}{1125} \pi \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{128}{1125} \pi$

[3]

(1)

$n=1$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

であるから, $a_1 = a, b_1 = b$ とすれば

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

となる。 $n=k$ のとき

$$A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$$

となると仮定すると,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot a_k + b \cdot b_k & b \cdot a_k + a \cdot b_k \\ b \cdot a_k + a \cdot b_k & a \cdot a_k + b \cdot b_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{cases} a_{k+1} = a \cdot a_k + b \cdot b_k \\ b_{k+1} = b \cdot a_k + a \cdot b_k \end{cases}$$

とすれば

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

となる。以上より, すべての自然数 n に対して,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

となる実数 a_n, b_n が存在する。

(証明終)

また, a_n, b_n を用いて a_{n+1}, b_{n+1} を表すと,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot b_n \\ b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot b_n \\ b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n \end{cases}$$

(2)

(1)で求めた漸化式の第1式と第2式を足し合わせると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= a(a_n + b_n) + b(a_n + b_n) \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= (a+b)c_n \end{aligned}$$

となり, 第1式から第2式を引くと,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= a(a_n - b_n) - b(a_n - b_n) \\ \Leftrightarrow d_{n+1} &= (a-b)d_n \end{aligned}$$

となる。したがって, c_n, d_n の漸化式は

$$c_{n+1} = (a+b)c_n, d_{n+1} = (a-b)d_n$$

となる。この漸化式より,

$$\begin{aligned} c_n &= (a+b)^{n-1} c_1 \\ &= (a+b)^{n-1} (a+b) (\because c_1 = a_1 + b_1 = a+b) \\ &= (a+b)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n &= (a-b)^{n-1} d_1 \\ &= (a-b)^{n-1} (a-b) (\because d_1 = a_1 - b_1 = a-b) \\ &= (a-b)^n \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \text{ 漸化式: } c_{n+1} = (a+b)c_n, d_{n+1} = (a-b)d_n$$

$$\text{一般項: } c_n = (a+b)^n, d_n = (a-b)^n$$

(3)

$c_n = a_n + b_n, d_n = a_n - b_n$ であるから, (2)の結果を利用すると,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(c_n + d_n) \\ &= \frac{1}{2}\{(a+b)^n + (a-b)^n\} \\ b_n &= \frac{1}{2}(c_n - d_n) \\ &= \frac{1}{2}\{(a+b)^n - (a-b)^n\} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^n + (a-b)^n\}, b_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^n - (a-b)^n\}$$

[4]

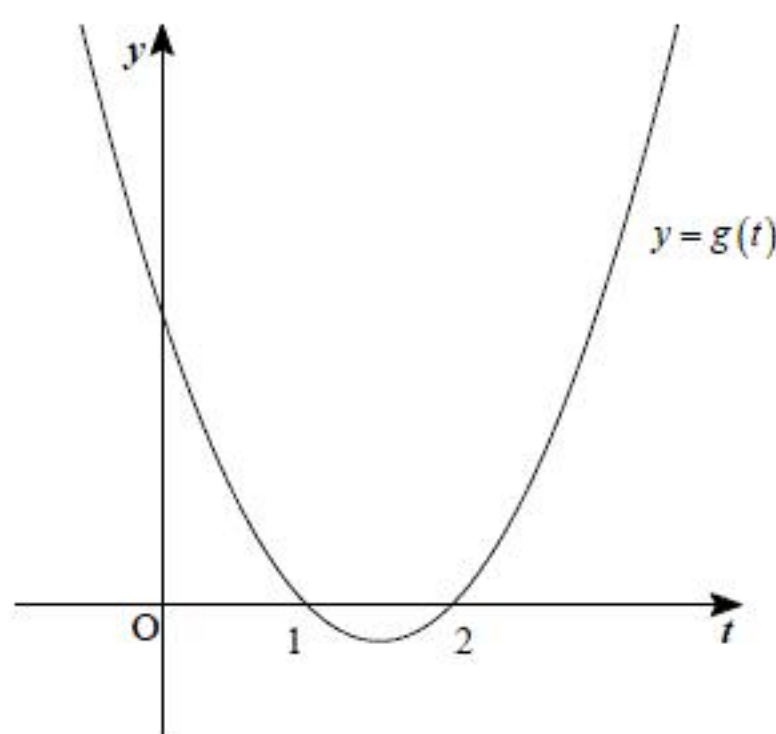
$\int_0^x (t-1)(t-2)dt$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^x (t-1)(t-2)dt &= \int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \\ &= \frac{1}{3}x \left\{ \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} \right\}\end{aligned}$$

となる。常に $\left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} > 0$ であることから、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\left| \int_0^x (t-1)(t-2)dt \right| &= \left| \frac{1}{3}x \left\{ \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} \right\} \right| \\ &= \frac{1}{3}x \left\{ \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} \right\} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\end{aligned}$$

となる。また、 $g(t) = (t-1)(t-2)$ とすると、 $y = g(t)$ のグラフは以下の図のようになる。



[1] $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^x |(t-1)(t-2)|dt &= \int_0^x (t-1)(t-2)dt \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\end{aligned}$$

となる。

[2] $1 \leq x < 2$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^x |(t-1)(t-2)|dt &= \int_0^1 (t-1)(t-2)dt - \int_1^x (t-1)(t-2)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_1^x \\ &= \frac{5}{6} + \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。

[3] $x \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^x |(t-1)(t-2)|dt &= \int_0^1 (t-1)(t-2)dt - \int_1^2 (t-1)(t-2)dt + \int_2^x (t-1)(t-2)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_2^x \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

以上、[1], [2], [3]より、 $0 < x < 1$ のとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、 $1 \leq x < 2$ のとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + \frac{5}{3}\end{aligned}$$

であり、 $x \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

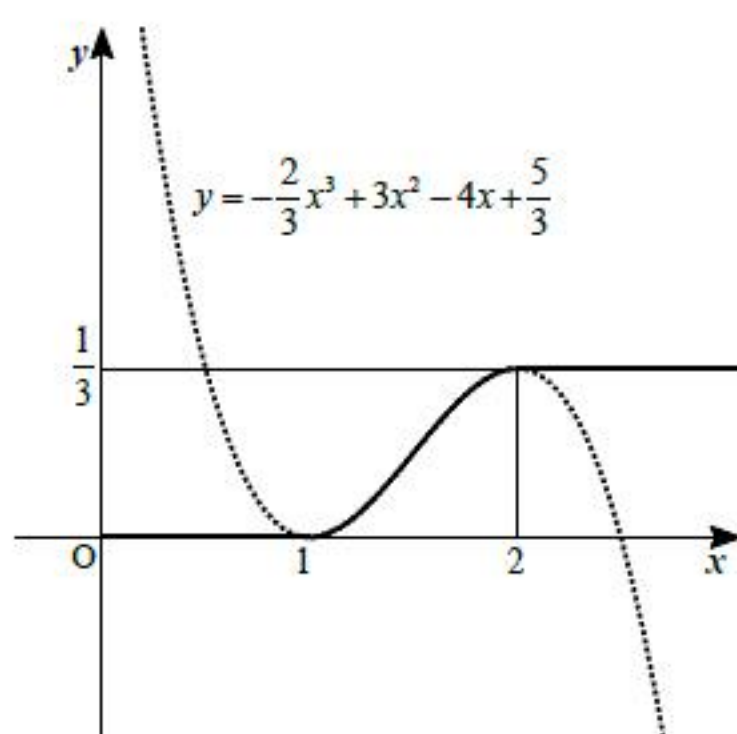
である。ここで、 $1 \leq x < 2$ のとき、

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x^2 + 6x - 4 \\ &= -2(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

となるから、増減表は以下の通りである。

x	1	...	2
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$		↗	

以上より、 $y = f(x)$ のグラフは以下の図の実線部分である。



(答) 前図