

【1】

(1)

放物線 C_2 上の点 (p, kp^2) における接線を考える。放物線 C_2 の方程式を x について微分する

と、

$$y' = 2kx$$

となるため、点 (p, kp^2) における接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2kp(x-p) + kp^2 \\ &= 2kpx - kp^2 \end{aligned}$$

である。この接線と放物線 C_1 の交点を求めるため、方程式を連立し、 y を消去すると、

$$\begin{aligned} -x^2 - 2x - 1 &= 2kpx - kp^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + (2+2kp)x + 1 - kp^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。この2次方程式の判別式を D とすると、放物線 C_2 の接線が放物線 C_1 に接するには $D=0$ となればよい。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1+kp)^2 - 1 + kp^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + 2kp + k^2 p^2 - 1 + kp^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (k^2 + k)p^2 + 2kp &= 0 \\ \Leftrightarrow kp\{(k+1)p + 2\} &= 0 \\ \Leftrightarrow p = 0, -\frac{2}{k+1} \end{aligned}$$

となる。以上より、放物線 C_1 の接線であり放物線 C_2 の接線でもあるような直線の方程式は、

$$y = 0, y = -\frac{4k}{k+1}x - \frac{4k}{(k+1)^2}$$

である。

$$(答) \quad y = 0, y = -\frac{4k}{k+1}x - \frac{4k}{(k+1)^2}$$

(2)

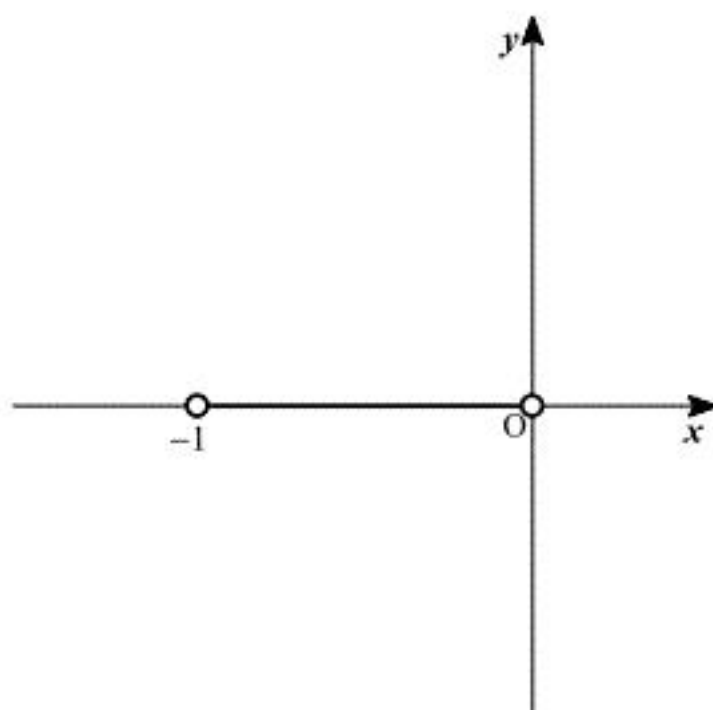
(1)で求めた直線の交点の y 座標は0である。したがって、交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{4k}{k+1}x - \frac{4k}{(k+1)^2} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{4k}{(k+1)^2} \cdot \frac{k+1}{4k} \\ &= -\frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

となる。 $k > 0$ であるから $-\frac{1}{k+1} > -1$ であり、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} -\frac{1}{k+1} = 0$$

となるため、 $-1 < -\frac{1}{k+1} < 0$ となる。以上より、交点Pの軌跡は以下の図のようになる。



(答) 前図

[2]

(1)

点Cは辺ABを2:1に内分する点であるから、

$$\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

となる。

$$(答) \vec{c} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

(2)

$\vec{c}$ の大きさの2乗を計算すると、

$$\begin{aligned} |\vec{c}|^2 &= \frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{1}{9} \cdot 49 + \frac{4}{9} \cdot 36 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

となる。OC=5であるから、

$$|\vec{c}|^2 = 25$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \frac{1}{9} \cdot 49 + \frac{4}{9} \cdot 36 + \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 25 \\ \Leftrightarrow \frac{4}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} &= \frac{32}{9} \\ \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} &= 8 \end{aligned}$$

となる。

(答) 8

(3)

$\vec{a}, \vec{b}$ の内積の定義より、

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle AOB \\ \Leftrightarrow \cos \angle AOB &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{8}{7 \cdot 6} \\ &= \frac{4}{21} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle OAB$ の面積は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \angle AOB &= \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{4}{21}\right)^2} \\ &= 21 \cdot \frac{5\sqrt{17}}{21} \\ &= 5\sqrt{17} \end{aligned}$$

となる。

(答) $5\sqrt{17}$

【3】

(1)

与えられた式を変形すると、

$$\begin{aligned}1+\sqrt{2} &= a+b\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow (a-1)+(b-1)\sqrt{2} &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。 $b-1 \neq 0$ と仮定すると、 $\textcircled{1}$ を変形して

$$\sqrt{2} = -\frac{a-1}{b-1}$$

となり、 a, b が整数であるため $\sqrt{2}$ が有理数となる。しかし $\sqrt{2}$ は無理数であることから、矛盾が生じるため、 $b-1=0 \Leftrightarrow b=1$ である。これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\begin{aligned}a-1 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 1\end{aligned}$$

となる。以上より、

$$a=b=1$$

であることが示された。

(証明終)

(2)

方程式 $(1+\sqrt{2})^{k+1} = a+b\sqrt{2}$ の両辺を $1+\sqrt{2}$ で割ると、

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^k &= \frac{a+b\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \\ &= (a+b\sqrt{2})(\sqrt{2}-1) \\ &= (-a+2b)+(a-b)\sqrt{2}\end{aligned}$$

となるため、

$$\begin{cases} a' = -a+2b \\ b' = a-b \end{cases}$$

となる。

(答) $a' = -a+2b, b' = a-b$

(3)

$n=1$ のとき、

$$(1+\sqrt{2})^1 = a+b\sqrt{2}$$

を満たしているならば、(1)の結果より、

$$a=b=1$$

であるため、

$$(1-\sqrt{2})^1 = a-b\sqrt{2}$$

が成り立つ。また、 $n=k$ のとき与えられた命題が成り立つと仮定すると、

$$(1+\sqrt{2})^k = a+b\sqrt{2}$$

を満たしているならば

$$(1-\sqrt{2})^k = a-b\sqrt{2}$$

が成り立つ。したがって、

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{k+1} &= (a+b\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) \\ &= (a+2b)+(a+b)\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})^{k+1} &= (a-b\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) \\ &= (a+2b)-(a+b)\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。 $a+2b, a+b$ は整数であるから、 $n=k$ のときに与えられた命題が成り立つと仮定すると、 $n=k+1$ のときにも命題は成り立つ。以上より、すべての自然数 n に対して命題が成り立つことが示された。

(証明終)

〔4〕

(1)

A' の座標を $A'(p, q)$ とする。直線 AA' の傾きは $\frac{1-q}{1-p}$ であるから、

$$\frac{1-q}{1-p} \cdot (-a) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-q}{1-p} = \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow a(1-q) = 1-p \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。線分 AA' の中点は直線 $y = -ax + 2a + 2$ の上にあるため、

$$\frac{1+q}{2} = -a \cdot \frac{1+p}{2} + 2a + 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①、②より、

$$\begin{cases} p = \frac{3a^2 + 2a + 1}{1 + a^2} \\ q = \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a^2} \end{cases}$$

となるため、

$$A' \left(\frac{3a^2 + 2a + 1}{1 + a^2}, \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a^2} \right)$$

となる。

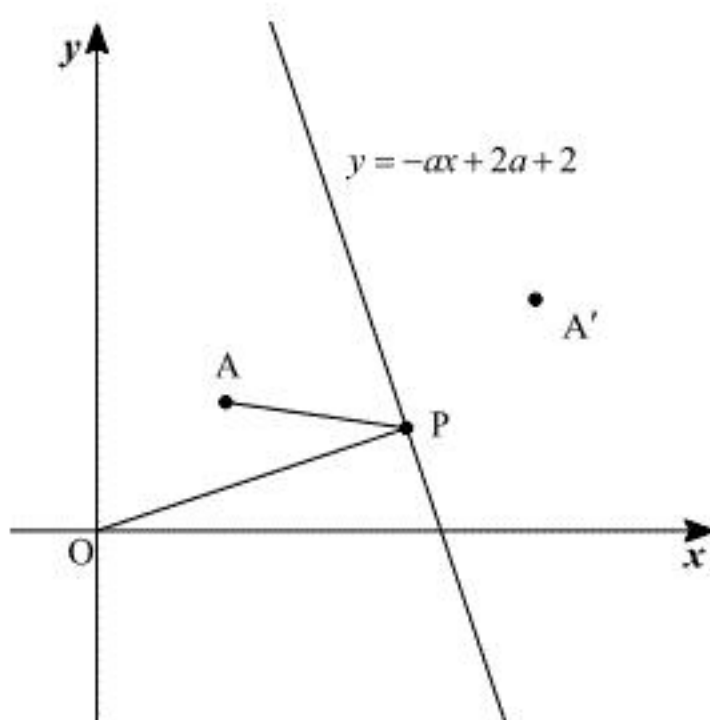
$$(\text{答}) \quad A' \left(\frac{3a^2 + 2a + 1}{1 + a^2}, \frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a^2} \right)$$

(2)

方程式 $y = -ax + 2a + 2$ に $x = 1$ を代入すると、

$$\begin{aligned} y &= -a + 2a + 2 \\ &= a + 2 > 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となるため、点 $(1, 1)$ は直線 $y = -ax + 2a + 2$ の下側に存在する。したがって、点 A, A' と直線 $y = -ax + 2a + 2$ のグラフは以下の図のようになる。



前図より、 $PA = PA'$ であるから、

$$OP + PA = OP + PA'$$

となり、 $OP + PA$ が最小となるのは3点 O, P, A' が一直線上に並ぶときであることがわかる。

したがって、 $OP + PA$ の最小値を求めると、

$$\begin{aligned} OA' &= \sqrt{\left(\frac{3a^2 + 2a + 1}{1 + a^2} \right)^2 + \left(\frac{a^2 + 2a + 3}{1 + a^2} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{10a^4 + 16a^3 + 20a^2 + 16a + 10}}{1 + a^2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{10a^4 + 16a^3 + 20a^2 + 16a + 10}}{1 + a^2}$$

(3)

(2)で得られた結果を変形すると、

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{\sqrt{10a^4 + 16a^3 + 20a^2 + 16a + 10}}{1 + a^2} \\ &= \frac{\sqrt{10(a^4 + 2a^2 + 1) + 16a(a^2 + 1)}}{1 + a^2} \\ &= \sqrt{10 + \frac{16a}{a^2 + 1}} \\ &= \sqrt{10 + \frac{16}{a + \frac{1}{a}}} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、 $f(a)$ が最大となるとき、 $a + \frac{1}{a}$ は最小である。 $a > 0$ であるから、

相加・相乗平均の関係より、

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$$

となり、この不等式の等号は、

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{a} \\ \therefore a &= 1 \quad (\because a > 0) \end{aligned}$$

となる場合に成り立つ。以上より、 $f(a)$ を最大にするような a の値は1である。

$$(\text{答}) \quad a = 1$$