

[1]

(1)

$n=1$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

であるから, $a_1 = a, b_1 = b$ とすれば

$$A^1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

となる。 $n=k$ のとき

$$A^k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$$

となると仮定すると,

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot a_k + b \cdot b_k & b \cdot a_k + a \cdot b_k \\ b \cdot a_k + a \cdot b_k & a \cdot a_k + b \cdot b_k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるため,

$$\begin{cases} a_{k+1} = a \cdot a_k + b \cdot b_k \\ b_{k+1} = b \cdot a_k + a \cdot b_k \end{cases}$$

とすれば

$$A^{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} & b_{k+1} \\ b_{k+1} & a_{k+1} \end{pmatrix}$$

となる。以上より, すべての自然数 n に対して,

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ b_n & a_n \end{pmatrix}$$

となる実数 a_n, b_n が存在する。

(証明終)

また, a_n, b_n を用いて a_{n+1}, b_{n+1} を表すと,

$$\begin{cases} a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot b_n \\ b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n \end{cases}$$

となる。

$$(答) \begin{cases} a_{n+1} = a \cdot a_n + b \cdot b_n \\ b_{n+1} = b \cdot a_n + a \cdot b_n \end{cases}$$

(2)

(1)で求めた漸化式の第1式と第2式を足し合わせると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= a(a_n + b_n) + b(a_n + b_n) \\ \Leftrightarrow c_{n+1} &= (a+b)c_n \end{aligned}$$

となり, 第1式から第2式を引くと,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - b_{n+1} &= a(a_n - b_n) - b(a_n - b_n) \\ \Leftrightarrow d_{n+1} &= (a-b)d_n \end{aligned}$$

となる。したがって, c_n, d_n の漸化式は

$$c_{n+1} = (a+b)c_n, d_{n+1} = (a-b)d_n$$

となる。この漸化式より,

$$\begin{aligned} c_n &= (a+b)^{n-1} c_1 \\ &= (a+b)^{n-1} (a+b) (\because c_1 = a_1 + b_1 = a+b) \\ &= (a+b)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_n &= (a-b)^{n-1} d_1 \\ &= (a-b)^{n-1} (a-b) (\because d_1 = a_1 - b_1 = a-b) \\ &= (a-b)^n \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \text{ 漸化式: } c_{n+1} = (a+b)c_n, d_{n+1} = (a-b)d_n$$

$$\text{一般項: } c_n = (a+b)^n, d_n = (a-b)^n$$

(3)

$c_n = a_n + b_n, d_n = a_n - b_n$ であるから, (2)の結果を利用すると,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(c_n + d_n) \\ &= \frac{1}{2}\{(a+b)^n + (a-b)^n\} \\ b_n &= \frac{1}{2}(c_n - d_n) \\ &= \frac{1}{2}\{(a+b)^n - (a-b)^n\} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \ a_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^n + (a-b)^n\}, b_n = \frac{1}{2}\{(a+b)^n - (a-b)^n\}$$

[2]

(1)

点 $Q(a, b)$ は双曲線 C 上の点であるから,

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{9} - \frac{b^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow b^2 &= 4\left(\frac{a^2}{9} - 1\right)\end{aligned}$$

となる。 $b > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}b &= 2\sqrt{\frac{a^2}{9} - 1} \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 9}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad b = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 9}$$

(2)

双曲線 C の方程式 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ を x について微分すると,

$$\begin{aligned}\frac{2x}{9} - \frac{2yy'}{4} &= 0 \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{4x}{9y}\end{aligned}$$

となる。したがって接線 l の方程式は,

$$\begin{aligned}y &= \frac{4a}{9b}(x - a) + b \\ &= \frac{2a}{3\sqrt{a^2 - 9}}(x - a) + \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 9} \\ &= \frac{2}{3\sqrt{a^2 - 9}}(ax - 9)\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad y = \frac{2}{3\sqrt{a^2 - 9}}(ax - 9)$$

(3)

(2)で求めた接線の方程式に $y = 0$ を代入すると,

$$\begin{aligned}0 &= \frac{2}{3\sqrt{a^2 - 9}}(ax - 9) \\ \Leftrightarrow ax - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{a}\end{aligned}$$

となる。したがって $R\left(\frac{9}{a}, 0\right)$ となるため,

$$c = \frac{9}{a}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad c = \frac{9}{a}$$

(4)

$P(a, 0)$, $Q(a, b)$, $R\left(\frac{9}{a}, 0\right)$ であるから,

$$\begin{aligned}PQ &= b \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 9} \\ PR &= a - \frac{9}{a} \\ &= \frac{a^2 - 9}{a}\end{aligned}$$

となる。したがって,

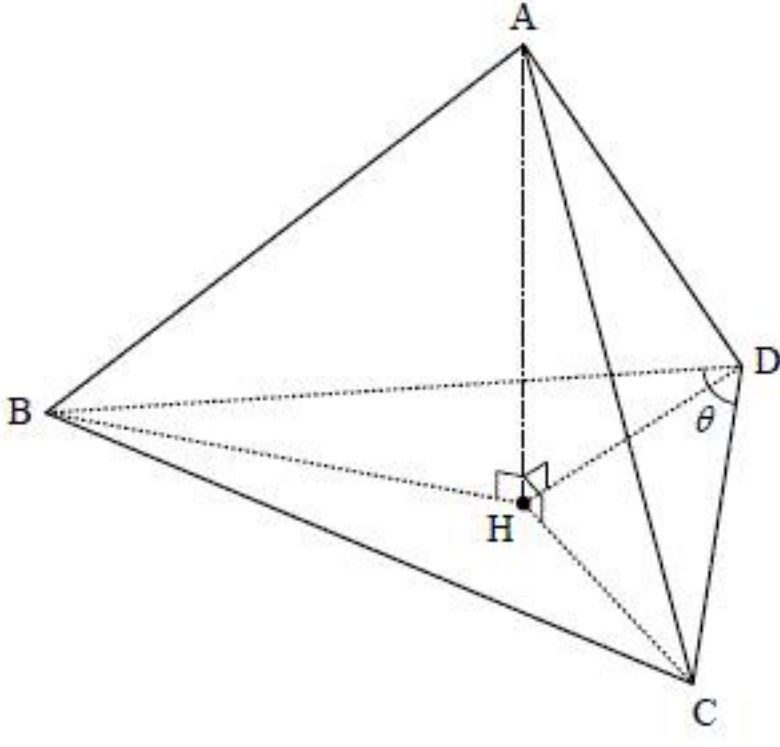
$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{PQ}{PR} &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a\sqrt{a^2 - 9}}{3(a^2 - 9)} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a}{3\sqrt{a^2 - 9}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{3\sqrt{1 - \frac{9}{a^2}}} \\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{2}{3}$$

[3]

(1)



$\triangle ABC$ は二等辺三角形であるから、点 H は線分 BC の垂直二等分線上にある。同様に、 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ABD$ は二等辺三角形であるから、点 H は線分 CD の垂直二等分線上および線分 BD の垂直二等分線上にある。したがって、点 H は $\triangle BCD$ の外心である。 $\triangle BCD$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理より、

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin \theta} = 2R$$
$$\Leftrightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2\sin \theta}$$

となる。 BH 、 CH 、 DH は $\triangle BCD$ の外接円の半径であるから、

$$BH = CH = DH = R = \frac{\sqrt{3}}{2\sin \theta}$$

となる。また、 $\triangle ADH$ は $\angle AHD = 90^\circ$ を満たす直角三角形であるから、

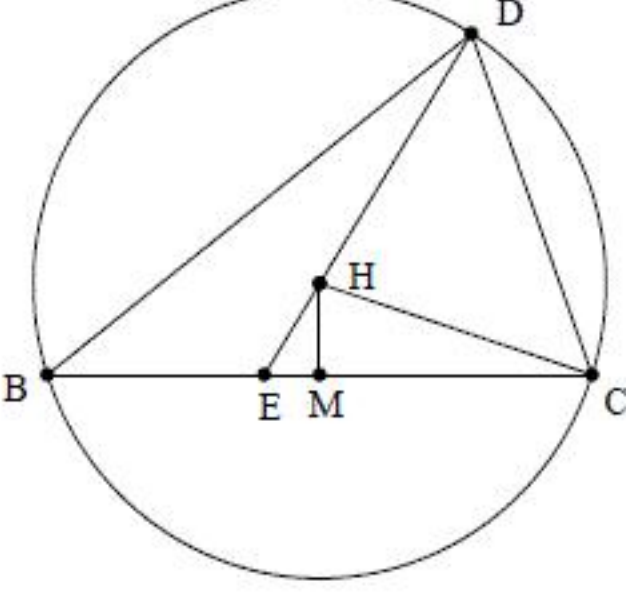
$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{3}{4\sin^2 \theta}}$$
$$= \frac{\sqrt{4\sin^2 \theta - 3}}{2\sin \theta}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad AH = \frac{\sqrt{4\sin^2 \theta - 3}}{2\sin \theta}, \quad BH = \frac{\sqrt{3}}{2\sin \theta}, \quad CH = \frac{\sqrt{3}}{2\sin \theta}, \quad DH = \frac{\sqrt{3}}{2\sin \theta}$$

(2)

θ が一定であることから、 AH は一定である。したがって、 $\triangle BCD$ の面積が最大となる場合を考えればよい。線分 BC の中点を M 、直線 DH と線分 BC の交点を E とすると、点 B 、 C 、 D 、 E 、 H 、 M の位置関係は下の図のようになる。



前図より、

$$\angle BHC = 2\theta \quad (\text{円周角と中心角の関係})$$

となるため、

$$\angle MHC = \theta$$

となる。 $\angle DEC = \alpha$ とすると、 $0 < \alpha < \pi$ であり、

$$HM = CH \cos \theta = EH \sin \alpha$$
$$\Leftrightarrow EH = \frac{CH \cos \theta}{\sin \alpha}$$

となる。したがって、 $\triangle BCD$ の面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot (DH + EH) \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} (DH \sin \alpha + CH \cos \theta)$$

となる。 θ が一定であるため DH 、 CH 、 $\cos \theta$ は一定である。したがって、 $\sin \alpha = 1$ 、すなわち

$\theta = \frac{\pi}{2}$ となるときに、 $\triangle BCD$ の面積は

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (DH + CH \cos \theta) = \frac{3}{4\sin \theta} (1 + \cos \theta)$$

で最大となる。以上より、 $t = \cos \theta$ として四面体 $ABCD$ の体積の最大値を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4\sin \theta} (1 + \cos \theta) \cdot AH &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4\sin \theta} (1 + \cos \theta) \cdot \frac{\sqrt{4\sin^2 \theta - 3}}{2\sin \theta} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta) \sqrt{4\sin^2 \theta - 3}}{8\sin^2 \theta} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta) \sqrt{4(1 - \cos^2 \theta) - 3}}{8(1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{(1 + \cos \theta) \sqrt{1 - 4\cos^2 \theta}}{8(1 - \cos^2 \theta)} \\ &= \frac{(1 + t) \sqrt{1 - 4t^2}}{8(1 - t^2)} \\ &= \frac{\sqrt{1 - 4t^2}}{8(1 - t)} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{1 - 4t^2}}{8(1 - t)}$$

(3)

$V(t) = \frac{\sqrt{1 - 4t^2}}{8(1 - t)}$ であるから、 $V(t)$ の導関数を計算すると、

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{-\frac{8t}{2\sqrt{1 - 4t^2}} \cdot 8(1 - t) + 8\sqrt{1 - 4t^2}}{64(1 - t)^2} \\ &= \frac{4(t^2 - t) + 1 - 4t^2}{8(1 - t)^2 \sqrt{1 - 4t^2}} \\ &= \frac{1 - 4t}{8(1 - t)^2 \sqrt{1 - 4t^2}} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるから、

$$0 < \cos \theta < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{2}$$

である。したがって、この範囲における $V(t)$ の増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{1}{2}$
V'	+	+	0	-	+
V	$V(0)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	$V\left(\frac{1}{2}\right)$

したがって、 $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲で θ が動くときの $V(t)$ の最大値は、

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{4}}}{8\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{3}}{12}$$

[4]

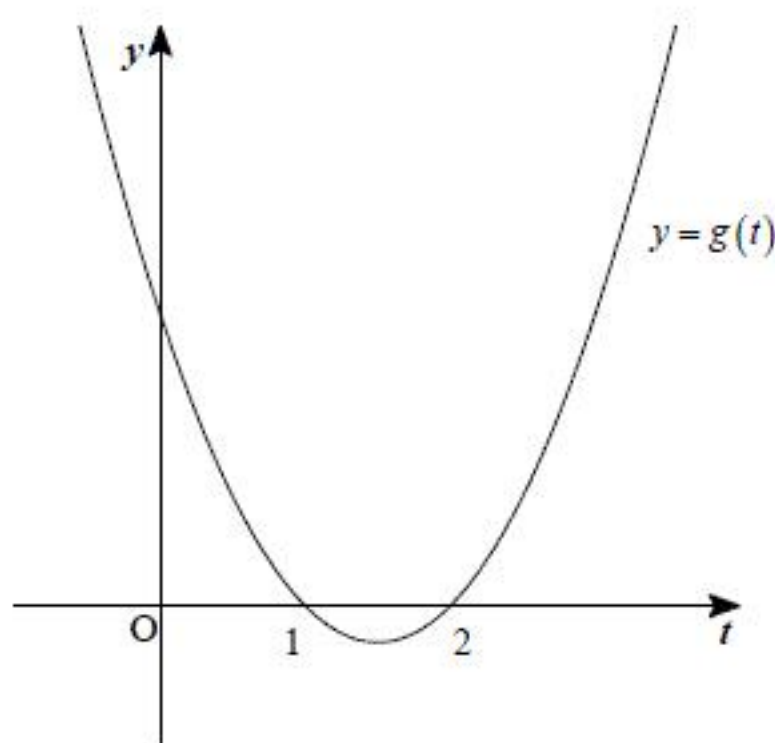
$\int_0^x (t-1)(t-2)dt$ を計算すると、

$$\begin{aligned}\int_0^x (t-1)(t-2)dt &= \int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \\ &= \frac{1}{3}x \left\{ \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} \right\}\end{aligned}$$

となる。常に $\left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} > 0$ であることから、 $x > 0$ のとき、

$$\begin{aligned}\left| \int_0^x (t-1)(t-2)dt \right| &= \left| \frac{1}{3}x \left\{ \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} \right\} \right| \\ &= \frac{1}{3}x \left\{ \left(x - \frac{9}{4} \right)^2 + \frac{15}{16} \right\} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\end{aligned}$$

となる。また、 $g(t) = (t-1)(t-2)$ とすると、 $y = g(t)$ のグラフは以下の図のようになる。



[1] $0 < x < 1$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^x |(t-1)(t-2)|dt &= \int_0^x (t-1)(t-2)dt \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\end{aligned}$$

となる。

[2] $1 \leq x < 2$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^x |(t-1)(t-2)|dt &= \int_0^1 (t-1)(t-2)dt - \int_1^x (t-1)(t-2)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_1^x \\ &= \frac{5}{6} + \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{3}\end{aligned}$$

となる。

[3] $x \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^x |(t-1)(t-2)|dt &= \int_0^1 (t-1)(t-2)dt - \int_1^2 (t-1)(t-2)dt + \int_2^x (t-1)(t-2)dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_2^x \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

以上、[1]、[2]、[3]より、 $0 < x < 1$ のとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

であり、 $1 \leq x < 2$ のとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + \frac{5}{3} - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + \frac{5}{3}\end{aligned}$$

であり、 $x \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

である。ここで、 $1 \leq x < 2$ のとき、

$$\begin{aligned}f'(x) &= -2x^2 + 6x - 4 \\ &= -2(x-1)(x-2)\end{aligned}$$

となるから、増減表は以下の通りである。

x	1	...	2
$f'(x)$	0	+	0
$f(x)$		↗	

以上より、 $y = f(x)$ のグラフは以下の図の実線部分である。

