

【1】

(1)

放物線 C について

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 2px + q \\ &= -(x-p)^2 + p^2 + q \end{aligned}$$

より、頂点の座標は $(p, p^2 + q)$ である。これが直線 $y = mx - 3$ 上にあるとすると

$$\begin{aligned} p^2 + q &= mp - 3 \\ \Leftrightarrow q &= -p^2 + mp - 3 \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad q = -p^2 + mp - 3$$

(2)

C の頂点の x 座標が -4 であるとき、(1)の結果を用いて

$$p = -4$$

となり、さらに

$$\begin{aligned} q &= -(-4)^2 + m \cdot (-4) - 3 \\ &= -4m - 19 \end{aligned}$$

となる。 C は上に凸の放物線であるから、 C が x 軸と異なる 2 点で交わるのは C の頂点の y 座標が正であるときであり

$$\begin{aligned} p^2 + q &> 0 \\ \Leftrightarrow (-4)^2 + (-4m - 19) &> 0 \\ \Leftrightarrow -4m - 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow m &< -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。このとき、 C と x 軸との交点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、 α, β は x に関する 2 次方程式 $-x^2 + 2px + q = 0$ の異なる 2 つの実数解にあたるから、解と係数の関係より

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 2p \\ \alpha\beta &= -q \end{aligned}$$

となる。よって、 C が x 軸から切り取る線分の長さは $\beta - \alpha (> 0)$ であり

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{(2p)^2 - 4 \cdot (-q)} \\ &= 2\sqrt{p^2 + q} \\ &= 2\sqrt{-4m - 3} \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad m \text{ の値の範囲 : } m < -\frac{3}{4}, \text{ 線分の長さ : } 2\sqrt{-4m - 3}$$

(3)

C と y 軸の共有点の y 座標は q であり、これが負となるとき、(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} q &< 0 \\ \Leftrightarrow -p^2 + mp - 3 &< 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - mp + 3 &> 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$f(p) = p^2 - mp + 3$$

とおくと

$$f(p) = \left(p - \frac{m}{2}\right)^2 - \frac{m^2}{4} + 3$$

であるから、 $\textcircled{1}$ が p の値にかかわらず成り立つのは

$$\begin{aligned} -\frac{m^2}{4} + 3 &> 0 \\ \Leftrightarrow (m - 2\sqrt{3})(m + 2\sqrt{3}) &< 0 \\ \Leftrightarrow -2\sqrt{3} &< m < 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となるときである。

$$(\text{答}) \quad -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$$

[2]

点 $P(s, t)$ が直線 $x - 2y = 1$ 上を動くとき

$$\begin{aligned} s - 2t &= 1 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2}(s - 1) \end{aligned}$$

を満たし、点 Q の座標は

$$Q\left(s + \left|\frac{1}{2}(s - 1)\right|, \left|s + \frac{1}{2}(s - 1)\right|\right)$$

と表される。

[1] $s < 0$ のとき

点 Q の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} X &= s - \frac{1}{2}(s - 1) \\ &= \frac{1}{2}(s + 1) \\ Y &= -s + \frac{1}{2}(s - 1) \\ &= -\frac{1}{2}(s + 1) \end{aligned}$$

となる。 $s < 0$ であるとき

$$X < \frac{1}{2}$$

であり、また

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(s + 1) \\ \Leftrightarrow s &= 2X - 1 \end{aligned}$$

より、 X, Y は

$$\begin{aligned} Y &= -\frac{1}{2}\{(2X - 1) + 1\} \\ &= -X \end{aligned}$$

を満たす。

[2] $0 \leq s < 1$ のとき

点 Q の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} X &= s - \frac{1}{2}(s - 1) \\ &= \frac{1}{2}(s + 1) \\ Y &= s + \frac{1}{2}(s - 1) \\ &= \frac{1}{2}(3s - 1) \end{aligned}$$

となる。 $0 \leq s < 1$ であるとき

$$\frac{1}{2} \leq X < 1$$

であり、また

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(s + 1) \\ \Leftrightarrow s &= 2X - 1 \end{aligned}$$

より、 X, Y は

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2}\{3(2X - 1) - 1\} \\ &= 3X - 2 \end{aligned}$$

を満たす。

[3] $1 \leq s$ のとき

点 Q の座標を (X, Y) とおくと

$$\begin{aligned} X &= s + \frac{1}{2}(s - 1) \\ &= \frac{1}{2}(3s - 1) \\ Y &= s + \frac{1}{2}(s - 1) \\ &= \frac{1}{2}(3s - 1) \end{aligned}$$

となる。 $1 \leq s$ であるとき

$$1 \leq X$$

であり、また

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(3s - 1) \\ \Leftrightarrow s &= \frac{2}{3}X + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

より、 X, Y は

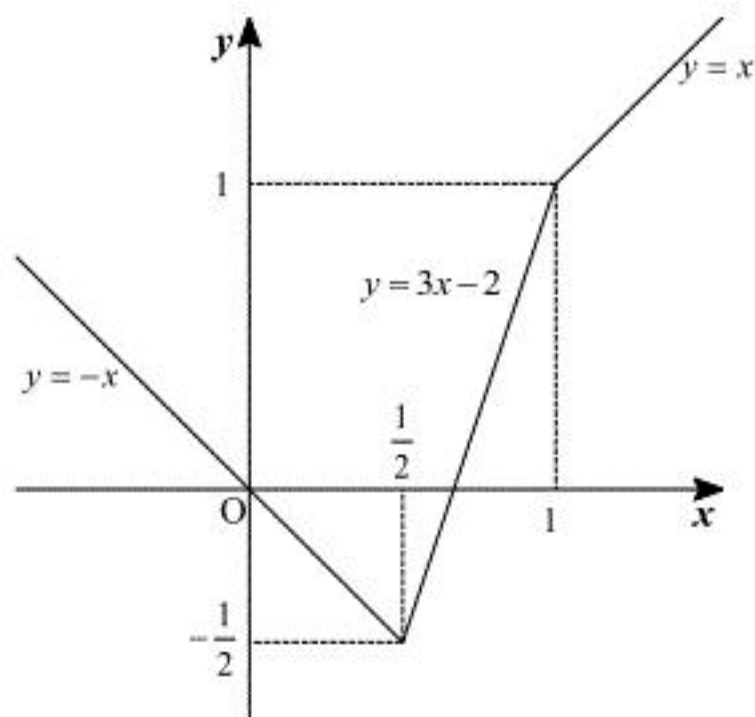
$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{2}{3}X + \frac{1}{3}\right) - 1\right\} \\ &= X \end{aligned}$$

を満たす。

以上、[1], [2], [3]より、点 $Q(x, y)$ の軌跡は

$$\begin{cases} y = -x & (x < \frac{1}{2}) \\ y = 3x - 2 & (\frac{1}{2} \leq x < 1) \\ y = x & (1 \leq x) \end{cases}$$

となり、これを図示すると下図のようになる。



[3]

(1)

$$\overrightarrow{OA} = (1, 5, 9), \overrightarrow{OB} = (3, 4, 8), \overrightarrow{OC} = (2, 6, 7), \overrightarrow{OD} = (a, b, 12)$$

であり、点 G は $\triangle ABC$ の重心であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= (2, 5, 8)\end{aligned}$$

となる。よって、点 G の座標は $(2, 5, 8)$ である。ここで、 $AG \perp DG$, $BG \perp DG$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DG} &= 0 \\ \Leftrightarrow (1, 0, -1) \cdot (2-a, 5-b, -4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2-a+4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 6\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{DG} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-1, 1, 0) \cdot (2-a, 5-b, -4) &= 0 \\ \Leftrightarrow -(2-a)+5-b &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 9\end{aligned}$$

となる。このとき、5点 A, B, C, D, G はすべて異なる点となる。

(答) $G(2, 5, 8), a=6, b=9$

(2)

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, -1), \overrightarrow{AC} = (1, 1, -2)$$

より

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり、 $0 < \angle BAC < \pi$ であることから

$$\angle BAC = \frac{\pi}{3}$$

となる。

(答) $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$

(3)

(2)の結果を用いて、 $\triangle ABC$ の面積を S とおくと

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(4)

$AG \perp DG$ かつ $BG \perp DG$ より、線分 DG は 3 点 A, B, G によって作られる平面に垂直であり、さらに点 C はこの平面上に存在するから、点 A, B, C, D を頂点とする四面体の体積を V とおくと

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot DG$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DG} &= (-4, -4, -4) \\ |\overrightarrow{DG}| &= 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

であるから、(3)の結果を用いて

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} \\ &= 6\end{aligned}$$

となる。

(答) 6