

【1】

方程式 $|x^2-4x+3|=|2x-5|$ について

$$\begin{aligned} |x^2-4x+3| &= |2x-5| \\ \Leftrightarrow |(x-3)(x-1)| &= |2x-5| \end{aligned}$$

となる。

[1] $x < 1$ のとき

$(x-3)(x-1) > 0, 2x-5 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} |x^2-4x+3| &= |2x-5| \\ \Leftrightarrow x^2-4x+3 &= -(2x-5) \\ \Leftrightarrow x^2-2x-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1-\sqrt{3} \quad (\because x < 1) \end{aligned}$$

となる。

[2] $1 \leq x < \frac{5}{2}$ のとき

$(x-3)(x-1) \leq 0, 2x-5 < 0$ であるから

$$\begin{aligned} |x^2-4x+3| &= |2x-5| \\ \Leftrightarrow -(x^2-4x+3) &= -(2x-5) \\ \Leftrightarrow x^2-6x+8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \quad (\because 1 \leq x < \frac{5}{2}) \end{aligned}$$

となる。

[3] $\frac{5}{2} \leq x < 3$ のとき

$(x-3)(x-1) < 0, 2x-5 \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} |x^2-4x+3| &= |2x-5| \\ \Leftrightarrow -(x^2-4x+3) &= 2x-5 \\ \Leftrightarrow x^2-2x-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1+\sqrt{3} \quad (\because \frac{5}{2} \leq x < 3) \end{aligned}$$

となる。

[4] $3 \leq x$ のとき

$(x-3)(x-1) \geq 0, 2x-5 > 0$ であるから

$$\begin{aligned} |x^2-4x+3| &= |2x-5| \\ \Leftrightarrow x^2-4x+3 &= 2x-5 \\ \Leftrightarrow x^2-6x+8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-2)(x-4) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 4 \quad (\because 3 \leq x) \end{aligned}$$

となる。

以上, [1], [2], [3], [4]より, 方程式 $|x^2-4x+3|=|2x-5|$ の解は

$$x = 1 \pm \sqrt{3}, 2, 4$$

である。

(答) $x = 1 \pm \sqrt{3}, 2, 4$

[2]

(1)

$\triangle ABP$ の面積を S_{ABP} とおくと

$$\begin{aligned} S_{ABP} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AP \cdot \sin \angle PAB \\ &= \frac{1}{2} lm \sin \alpha \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} lm \sin \alpha$$

(2)

$AC = x$ とおき, $\triangle ABC$ と $\triangle ACP$ の面積をそれぞれ S, S_{ACP} とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} lx \sin(\alpha + \beta) \\ S_{ACP} &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AC \cdot \sin \angle PAC \\ &= \frac{1}{2} mx \sin \beta \end{aligned}$$

となる。よって, (1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} S &= S_{ABP} + S_{ACP} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} lx \sin(\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} lm \sin \alpha + \frac{1}{2} mx \sin \beta \\ \Leftrightarrow \{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta\} x &= lm \sin \alpha \end{aligned}$$

となる。ここで, $x > 0, lm \sin \alpha > 0$ より, $l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta > 0$ であるから

$$x = \frac{lm \sin \alpha}{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta}$$

より

$$AC = \frac{lm \sin \alpha}{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta}$$

と表される。また, このとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} l \cdot \frac{lm \sin \alpha}{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta} \cdot \sin(\alpha + \beta) \\ &= \frac{l^2 m \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{2 \{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta\}} \end{aligned}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad AC = \frac{lm \sin \alpha}{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta}, S = \frac{l^2 m \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{2 \{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta\}}$$

(3)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} S - \frac{2m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} &= \frac{l^2 m \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}{2 \{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta\}} - \frac{2m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{l^2 m \sin \alpha \sin^2(\alpha + \beta) - 4m^2 \sin \alpha \sin \beta \{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta\}}{2 \sin(\alpha + \beta) \{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta\}} \\ &= \frac{m \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{l^2 \sin^2(\alpha + \beta) - 4lm \sin \beta \sin(\alpha + \beta) + 4m^2 \sin^2 \beta}{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta} \\ &= \frac{m \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\{l \sin(\alpha + \beta) - 2m \sin \beta\}^2}{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta} \end{aligned}$$

となり

$$m > 0, \sin \alpha > 0, \sin(\alpha + \beta) > 0, l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta > 0$$

であることと, $l \sin(\alpha + \beta) - 2m \sin \beta$ が実数であることより

$$\begin{aligned} \frac{m \sin \alpha}{2 \sin(\alpha + \beta)} \cdot \frac{\{l \sin(\alpha + \beta) - 2m \sin \beta\}^2}{l \sin(\alpha + \beta) - m \sin \beta} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow S - \frac{2m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow S &\geq \frac{2m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

[3]

(1)

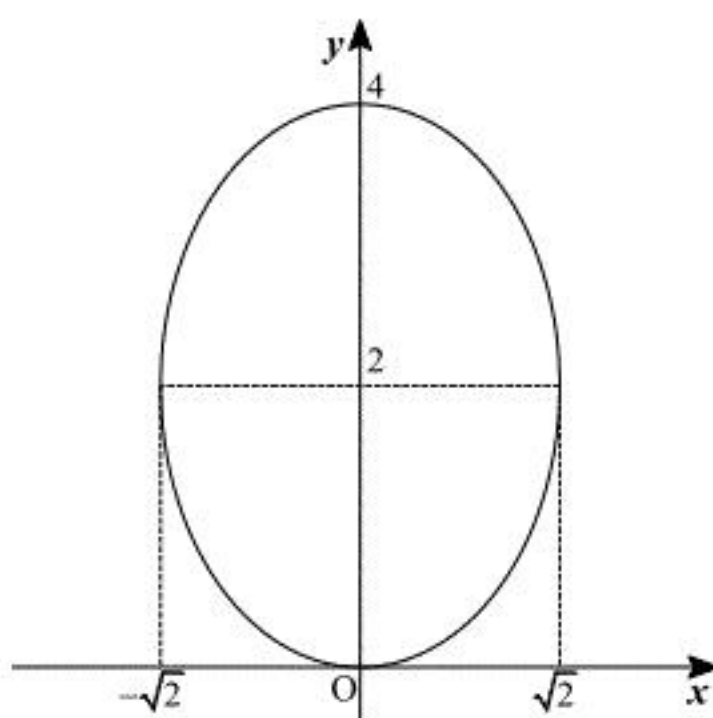
曲線 $C: 2x^2 + y^2 - 4y = 0$ について

$$2x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

となるから、曲線 C は楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ を y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線であり、その概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

曲線 C 上の点 $P(x, y)$ について、 $0 \leq \theta < 2\pi$ である実数 θ を用いて

$$x = \sqrt{2} \cos \theta, y = 2 \sin \theta + 2$$

と表されるから

$$\begin{aligned} xy &= \sqrt{2} \cos \theta (2 \sin \theta + 2) \\ &= 2\sqrt{2} (\sin \theta + 1) \cos \theta \end{aligned}$$

となる。ここで

$$f(\theta) = 2\sqrt{2} (\sin \theta + 1) \cos \theta$$

とおくと

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2\sqrt{2} \{ \cos^2 \theta - (\sin \theta + 1) \sin \theta \} \\ &= -2\sqrt{2} (2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1) \\ &= -4\sqrt{2} \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) (\sin \theta + 1) \end{aligned}$$

である。よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ における $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	(2π)
$f'(\theta)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(\theta)$	$2\sqrt{2}$	↗	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	↘	$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$	↗	0	↗	$(2\sqrt{2})$

以上より、 xy は

$$\theta = \frac{\pi}{6} \left(x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right) \text{ のとき最大値 } \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

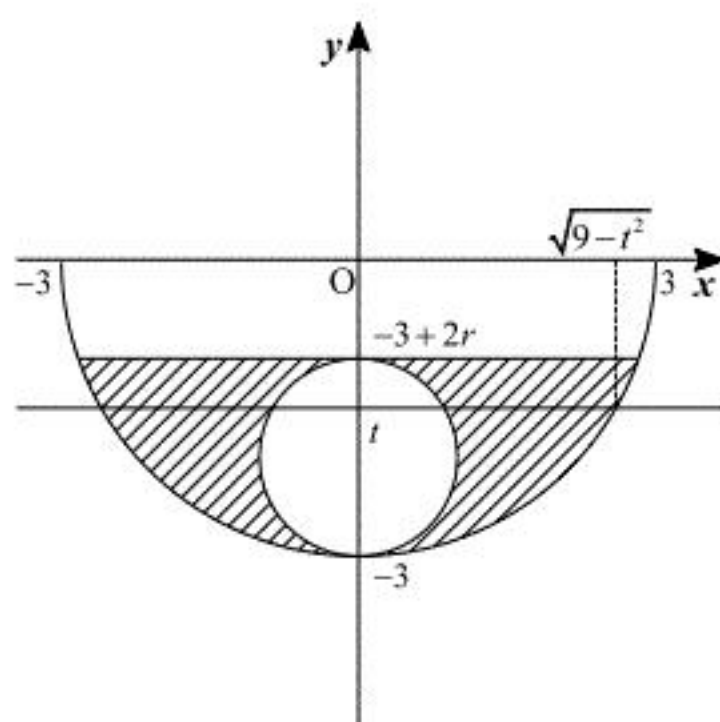
$$\theta = \frac{5}{6}\pi \left(x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right) \text{ のとき最小値 } -\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

をとる。

$$(答) \text{ 最大値 } \frac{3\sqrt{6}}{2} \left(x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right), \text{ 最小値 } -\frac{3\sqrt{6}}{2} \left(x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right)$$

[4]

容器の口の中心と球の中心を通る平面における断面図において、容器の口を通る直線を x 軸、容器の口の中心と球の中心を通る直線を y 軸とする。また、容器の切断面の方程式を $x^2 + y^2 = 9$ ($y \leq 0$) と表すこととする。



半径 r cm の球が水面と接していることから、水面は平面 $y = -3 + 2r$ 上に存在する。ただし、容器から水がこぼれることがなく、鉄球の半径は正の値であることから

$$-3 + 2r \leq 0 \text{ かつ } r > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < r \leq \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。水と鉄球を合わせた立体を A とおくと、 A の平面 $y = t$ ($-3 \leq t \leq -3 + 2r$) における切断面は半径 $\sqrt{9 - t^2}$ cm の円となるから、 A の体積を V cm³ とおくと

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^{-3+2r} \pi (\sqrt{9 - t^2})^2 dt \\ &= \pi \int_{-3}^{-3+2r} (9 - t^2) dt \\ &= \pi \left[9t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-3}^{-3+2r} \\ &= \left(-\frac{8}{3} r^3 + 12r^2 \right) \pi \end{aligned}$$

と表される。一方、 V cm³ は容器内の水の体積 8π cm³ と球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ cm³ の和に等しいから

$$V = 8\pi + \frac{4}{3}\pi r^3$$

とも表される。よって

$$\begin{aligned} \left(-\frac{8}{3} r^3 + 12r^2 \right) \pi &= 8\pi + \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \Leftrightarrow r^3 - 3r^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r-1)(r^2 - 2r - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= 1, 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となるが、このうち①を満たすものは $r = 1$ のみである。

(答) $r = 1$