

〔1〕

曲線 $C: 2x^2 + y^2 - 4y = 0$ について

$$2x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (y-2)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

となるから、曲線 C は楕円 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ を y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線である。曲線 C

上の点 $P(x, y)$ について、 $0 \leq \theta < 2\pi$ である実数 θ を用いて

$$x = \sqrt{2} \cos \theta, y = 2 \sin \theta + 2$$

と表されるから

$$xy = \sqrt{2} \cos \theta (2 \sin \theta + 2)$$

$$= 2\sqrt{2} (\sin \theta + 1) \cos \theta$$

となる。ここで

$$f(\theta) = 2\sqrt{2} (\sin \theta + 1) \cos \theta$$

とおくと

$$f'(\theta) = 2\sqrt{2} \{ \cos^2 \theta - (\sin \theta + 1) \sin \theta \}$$

$$= -2\sqrt{2} (2 \sin^2 \theta + \sin \theta - 1)$$

$$= -4\sqrt{2} \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) (\sin \theta + 1)$$

である。よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ における $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	(2π)
$f'(\theta)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(\theta)$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$(2\sqrt{2})$

以上より、 xy は

$$\theta = \frac{\pi}{6} \left(x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right) \text{ のとき最大値 } \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\theta = \frac{5}{6}\pi \left(x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right) \text{ のとき最小値 } -\frac{3\sqrt{6}}{2}$$

をとる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値 } \frac{3\sqrt{6}}{2} \left(x = \frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right), \text{ 最小値 } -\frac{3\sqrt{6}}{2} \left(x = -\frac{\sqrt{6}}{2}, y = 3 \right)$$

[2]

(1)

AC = x とおき、△ABC、△ABP、△ACP の面積をそれぞれ S, S_{ABP}, S_{ACP} とおくと

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \\ &= \frac{1}{2} l x \sin (\alpha + \beta) \\ S_{ABP} &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AP \cdot \sin \angle PAB \\ &= \frac{1}{2} l m \sin \alpha \\ S_{ACP} &= \frac{1}{2} \cdot AP \cdot AC \cdot \sin \angle PAC \\ &= \frac{1}{2} m x \sin \beta \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S &= S_{ABP} + S_{ACP} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} l x \sin (\alpha + \beta) &= \frac{1}{2} l m \sin \alpha + \frac{1}{2} m x \sin \beta \\ \Leftrightarrow \{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta\} x &= l m \sin \alpha \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x > 0, l m \sin \alpha > 0$ より、 $l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta > 0$ であるから

$$x = \frac{l m \sin \alpha}{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta}$$

より

$$AC = \frac{l m \sin \alpha}{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta}$$

と表される。

$$(\text{答}) \quad AC = \frac{l m \sin \alpha}{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta}$$

(2)

(1)の結果を用いて

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} l \cdot \frac{l m \sin \alpha}{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta} \cdot \sin (\alpha + \beta) \\ &= \frac{l^2 m \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{2 \{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta\}} \end{aligned}$$

と表されるから

$$\begin{aligned} S - \frac{2 m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} &= \frac{l^2 m \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{2 \{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta\}} - \frac{2 m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \\ &= \frac{l^2 m \sin \alpha \sin^2 (\alpha + \beta) - 4 m^2 \sin \alpha \sin \beta \{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta\}}{2 \sin (\alpha + \beta) \{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta\}} \\ &= \frac{m \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + \beta)} \cdot \frac{l^2 \sin^2 (\alpha + \beta) - 4 l m \sin \beta \sin (\alpha + \beta) + 4 m^2 \sin^2 \beta}{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta} \\ &= \frac{m \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + \beta)} \cdot \frac{\{l \sin (\alpha + \beta) - 2 m \sin \beta\}^2}{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta} \end{aligned}$$

となる。ここで

$$m > 0, \sin \alpha > 0, \sin (\alpha + \beta) > 0, l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta > 0$$

であることと、 $l \sin (\alpha + \beta) - 2 m \sin \beta$ が実数であることより

$$\begin{aligned} \frac{m \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + \beta)} \cdot \frac{\{l \sin (\alpha + \beta) - 2 m \sin \beta\}^2}{l \sin (\alpha + \beta) - m \sin \beta} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow S - \frac{2 m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow S &\geq \frac{2 m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(3)

(2)の結果を用いて、 $S = \frac{2 m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}$ のとき

$$\begin{aligned} l \sin (\alpha + \beta) - 2 m \sin \beta &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 m \sin \beta &= l \sin (\alpha + \beta) \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 m^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \\ &= \frac{l m \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}{\sin (\alpha + \beta)} \\ &= l m \sin \alpha \end{aligned}$$

より、(1)の結果より $S = 2 S_{ABP}$ が成り立ち、点 P は BC の中点となる。よって、△ABC の重心 G は線分 AP を 2:1 に内分する点となり

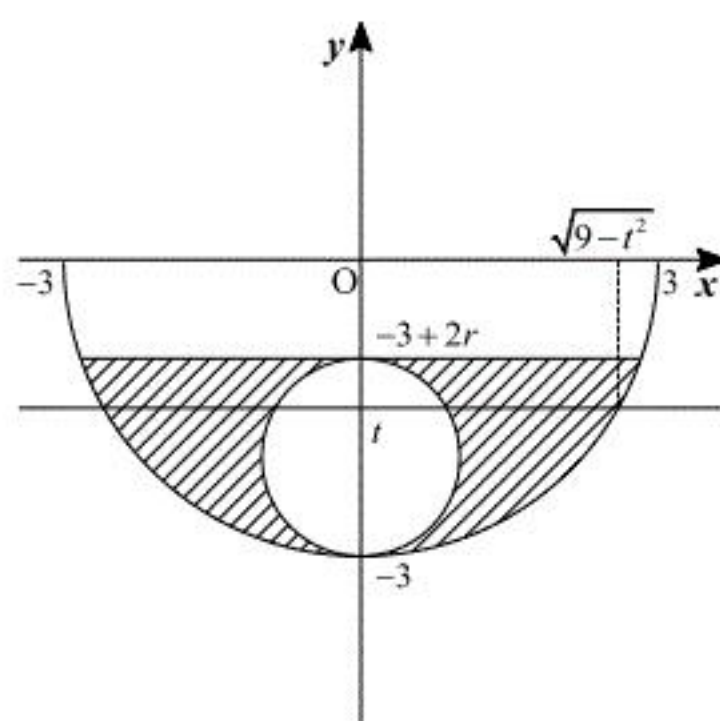
$$\frac{AG}{PG} = 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{AG}{PG} = 2$$

[3]

容器の口の中心と球の中心を通る平面における断面図において、容器の口を通る直線を x 軸、容器の口の中心と球の中心を通る直線を y 軸とする。また、容器の切断面の方程式を $x^2 + y^2 = 9$ ($y \leq 0$) と表すこととする。



半径 r cm の球が水面と接していることから、水面は平面 $y = -3 + 2r$ 上に存在する。ただし、容器から水がこぼれることがなく、鉄球の半径は正の値であることから

$$-3 + 2r \leq 0 \text{ かつ } r > 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < r \leq \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

を満たす。水と鉄球を合わせた立体を A とおくと、 A の平面 $y = t$ ($-3 \leq t \leq -3 + 2r$) における切断面は半径 $\sqrt{9 - t^2}$ cm の円となるから、 A の体積を V cm³ とおくと

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^{-3+2r} \pi (\sqrt{9 - t^2})^2 dt \\ &= \pi \int_{-3}^{-3+2r} (9 - t^2) dt \\ &= \pi \left[9t - \frac{1}{3} t^3 \right]_{-3}^{-3+2r} \\ &= \left(-\frac{8}{3} r^3 + 12r^2 \right) \pi \end{aligned}$$

と表される。一方、 V cm³ は容器内の水の体積 8π cm³ と球の体積 $\frac{4}{3}\pi r^3$ cm³ の和に等しいから

$$V = 8\pi + \frac{4}{3}\pi r^3$$

とも表される。よって

$$\begin{aligned} \left(-\frac{8}{3} r^3 + 12r^2 \right) \pi &= 8\pi + \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \Leftrightarrow r^3 - 3r^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (r - 1)(r^2 - 2r - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow r = 1, 1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

となるが、このうち①を満たすものは $r = 1$ のみである。

(答) $r = 1$

〔4〕

(1)

命題

「 $a+b+c$ が偶数ならば a, b, c の少なくとも 1 つは偶数である」

の対偶は

「 a, b, c がすべて奇数ならば $a+b+c$ は奇数である」

であり、これは真である。命題とその対偶の真偽は一致するから、命題「 $a+b+c$ が偶数ならば a, b, c の少なくとも 1 つは偶数である」が真であることが示された。

(証明終)

(2)

(i)

整数 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{27}$ を適当に並べ替えたものを $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{27}$ とするとき

$$\sum_{k=1}^{27} a_k = \sum_{k=1}^{27} b_k \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つ。よって

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{27} (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{27} a_k + \sum_{k=1}^{27} b_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^{27} a_k \end{aligned}$$

であるから、 $\sum_{k=1}^{27} (a_k + b_k)$ は偶数である。ここで、 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_{27} + b_{27}$ がすべて奇数であ

ると仮定すると、 $\sum_{k=1}^{27} (a_k + b_k)$ は 27 個の奇数の和であるから奇数となるが、これは $\sum_{k=1}^{27} (a_k + b_k)$

が偶数であることに反する。よって、 $a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_{27} + b_{27}$ の少なくとも 1 つは偶数であ

$$(a_1 + b_1) \cdot (a_2 + b_2) \cdot (a_3 + b_3) \cdots (a_{27} + b_{27})$$

は偶数となることが示された。

(証明終)

(ii)

$\sum_{k=1}^{27} a_k = S$ とすると、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{27} (pa_k + qb_k) &= p \sum_{k=1}^{27} a_k + q \sum_{k=1}^{27} b_k \\ &= (p+q)S \end{aligned}$$

となり、整数 p, q が $p+q+1=S$ を満たすとき

$$\sum_{k=1}^{27} (pa_k + qb_k) = (p+q)(p+q+1)$$

となる。 p, q は整数であり、 $p+q, p+q+1$ は連続する 2 つの整数であるから、

$(p+q)(p+q+1)$ は偶数である。よって

$$\sum_{k=1}^{27} (pa_k + qb_k) = (pa_1 + qb_1) + (pa_2 + qb_2) + (pa_3 + qb_3) + \cdots + (pa_{27} + qb_{27})$$

は偶数である。ここで、 $pa_1 + qb_1, pa_2 + qb_2, \dots, pa_{27} + qb_{27}$ がすべて奇数であると仮定すると、

$\sum_{k=1}^{27} (pa_k + qb_k)$ は 27 個の奇数の和であるから奇数となるが、これは $\sum_{k=1}^{27} (pa_k + qb_k)$ が偶数であ

ることに反する。よって、 $pa_1 + qb_1, pa_2 + qb_2, \dots, pa_{27} + qb_{27}$ の少なくとも 1 つは偶数であり

$$(pa_1 + qb_1) \cdot (pa_2 + qb_2) \cdot (pa_3 + qb_3) \cdots (pa_{27} + qb_{27})$$

は偶数となる。

(答) 偶数, 理由: 上記