

〔1〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= |x^3 - 3x^2 - 3x + 1| \\ &= |(x+1)(x^2 - 4x + 1)| \\ &= |(x+1)\{x - (2+\sqrt{3})\}\{x - (2-\sqrt{3})\}| \end{aligned}$$

より、 $f(x)=0$ の実数解は

$$x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$$

である。

(答) $x = -1, 2 \pm \sqrt{3}$

(2)

$$g(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$$

とする。 $g(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 6x - 3 \\ &= 3(x^2 - 2x - 1) \\ &= 3\{x - (1+\sqrt{2})\}\{x - (1-\sqrt{2})\} \end{aligned}$$

となる。これより、増減表は以下のようになる。

x	...	$1-\sqrt{2}$	...	$1+\sqrt{2}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗		↘		↗

ここで、

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3 - 3x^2 - 3x + 1 \\ &= (x^2 - 2x - 1)(x - 1) - 4x \end{aligned}$$

より、極値は

$$\begin{aligned} g(1+\sqrt{2}) &= -4(1+\sqrt{2}) = -4 - 4\sqrt{2} \\ g(1-\sqrt{2}) &= -4(1-\sqrt{2}) = -4 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

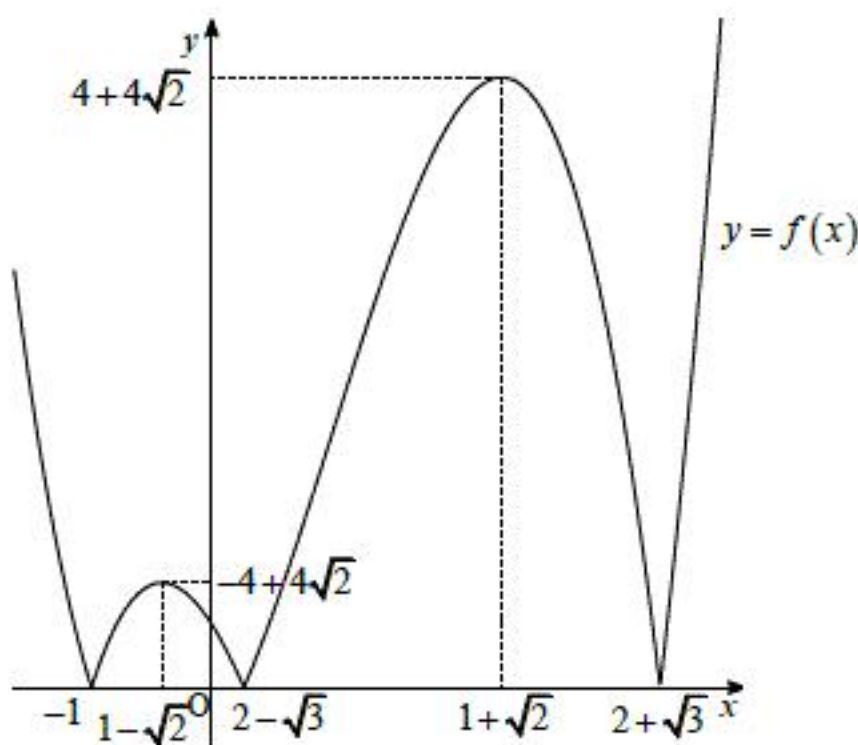
となる。 $f(x) = |g(x)|$ より(1)の結果から

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & (-1 \leq x < 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3} \leq x) \\ -g(x) & (x < -1, 2-\sqrt{3} \leq x < 2+\sqrt{3}) \end{cases}$$

である。これらより、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	$1-\sqrt{2}$	...	$2-\sqrt{3}$	...	$1+\sqrt{2}$	...	$2+\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-		+	0	-		+	0	-		+
$f(x)$	↘	0	↗	$-4+4\sqrt{2}$	↘	0	↗	$4+4\sqrt{2}$	↘	0	↗

したがって、グラフは以下のようになる。



(答) 前図

(3)

$f(x)=a$ がちょうど4個の異なる実数解をもつことは、 $y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの交点が4つあることと同値である。したがって、

$$-4+4\sqrt{2} < a < 4+4\sqrt{2}$$

となる。

(答) $-4+4\sqrt{2} < a < 4+4\sqrt{2}$

[2]

(1)

二項定理より

$$\begin{aligned}(1+a)^n &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k \cdot a^k \\ &= {}_nC_0 \cdot a^0 + {}_nC_1 \cdot a^1 + {}_nC_2 \cdot a^2 + {}_nC_3 \cdot a^3 + \cdots + {}_nC_n \cdot a^n\end{aligned}$$

と表せる。 $a > 0$, $n \geq 3$ より, $k = 0, 1, \dots, n$ に対して

$${}_nC_k \cdot a^k > 0$$

であるから

$$\begin{aligned}(1+a)^n &> {}_nC_3 \cdot a^3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3 \\ \therefore (1+a)^n &> \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3\end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

$r = 1+a$ とおくと, $r > 1$ より $a > 0$ である。また, $n \geq 3$ とすると(1)より

$$\begin{aligned}(1+a)^n &> \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3 \\ \Leftrightarrow r^n &> \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)a^3 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{r^n} &< \frac{6}{n(n-1)(n-2)a^3} \\ \Leftrightarrow \frac{n^2}{r^n} &< \frac{6}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)a^3}\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)a^3} = 0$$

であり, $0 < \frac{n^2}{r^n}$ と合わせて, はさみうちの原理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n} = 0$$

とわかる。

$$(答) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{r^n} = 0$$

[3]

(1)

正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{BC}{\sin \angle BAC} &= 2R \\ \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} &= 2R \\ \therefore \sin A &= \frac{a}{2R}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A \\ &= \frac{1}{2} cb \frac{a}{2R} \\ &= \frac{abc}{4R}\end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{abc}{4R}$$

(2)

$\triangle ABC$ の内心を O とすると

$$\begin{aligned}S &= \triangle OBC + \triangle OCA + \triangle OAB \\ &= \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr \\ &= \frac{1}{2} r(a+b+c)\end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{2} r(a+b+c)$$

(3)

(1), (2) の結果より

$$\begin{aligned}R &= \frac{abc}{4S} \\ r &= \frac{2S}{a+b+c}\end{aligned}$$

である。 $S_1 = \pi R^2$, $S_2 = \pi r^2$ より

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S_2} &= \frac{\pi R^2}{\pi r^2} \\ &= \left(\frac{R}{r} \right)^2 \\ &= \left\{ \frac{abc(a+b+c)}{8S^2} \right\}^2\end{aligned}$$

となる。一方、余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

である。これより

$$\begin{aligned}S^2 &= \left(\frac{1}{2} bc \sin A \right)^2 \\ &= \frac{b^2 c^2}{4} (1 - \cos^2 A) \\ &= \frac{b^2 c^2}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left\{ (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{16} (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{16} \left\{ (b+c)^2 - a^2 \right\} \left\{ a^2 - (b-c)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{16} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\end{aligned}$$

と求まる。これを $\frac{S_1}{S_2}$ の式に代入して

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S_2} &= \left\{ \frac{abc(a+b+c)}{8 \cdot \frac{1}{16} (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \right\}^2 \\ &= \frac{4a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)^2 (a-b+c)^2 (a+b-c)^2}\end{aligned}$$

が導かれる。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{4a^2 b^2 c^2}{(-a+b+c)^2 (a-b+c)^2 (a+b-c)^2}$$

[4]

(1)

数学的帰納法より $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\}$ となることを証明する。

[1] $n=1$ のとき

$f(x)$ を微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} + \frac{\beta}{(x-\beta)^2} \\ &= (-1)^1 1! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{1+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{1+1}} \right\} \end{aligned}$$

となることから成立する。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき

$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{k+1}} \right\}$ の成立を仮定する。これを x で微分すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (-1)^k k! \left\{ -\frac{(k+1)\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}} + \frac{(k+1)\beta}{(x-\beta)^{k+2}} \right\} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{(k+1)+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{(k+1)+1}} \right\} \end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ でも成立する。

以上[1], [2]より数学的帰納法から

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\}$$

が成立する。

(証明終)

(2)(i)

$x^2 - bx + c = 0$ の解を α, β とすると

$$x^2 - bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)$$

となる。 $b^2 - 4c > 0$ より、 α, β は異なる実数解であるから、 $\alpha - \beta \neq 0$ となる。これより

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{x^2 - bx + c} \\ &= \frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} f(x) \end{aligned}$$

となる。これを x で微分していくと

$$h^{(n)}(x) = \frac{1}{\alpha-\beta} f^{(n)}(x)$$

であるから、 $a_n = \frac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}$ は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c^n}{n!} \cdot \frac{1}{\alpha-\beta} (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(-\beta)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{c^n}{\alpha-\beta} (-1)^n \cdot \frac{1}{(-1)^{n+1}} \left(\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n} \right) \\ &= \frac{c^n}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha\beta)^n} \end{aligned}$$

となる。また、 $x^2 - bx + c = 0$ の解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = b \\ \alpha\beta = c \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(\alpha\beta)^n}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha\beta)^n} \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

(ii)

(i)より

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \{ (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n) \} \\ &= b \cdot \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - c \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= ba_{n+1} - ca_n \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+2} - ba_{n+1} + ca_n = 0$$

が成り立つことがわかる。

(証明終)