

【1】

(1)

数学的帰納法を利用して、

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\} \quad \cdots \textcircled{1}$$

を証明する。

[1] $n=1$ のとき

$f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\alpha}{(x-\alpha)^2} + \frac{\beta}{(x-\beta)^2} \\ &= (-1)^1 1! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{1+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{1+1}} \right\} \end{aligned}$$

となるから、 $n=1$ のとき①が成り立つ。

[2] $n=k$ において①が成り立つとき

仮定より、

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{k+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{k+1}} \right\}$$

が成り立つ。これを x で微分すると、

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (-1)^k k! \left\{ -\frac{(k+1)\alpha}{(x-\alpha)^{k+2}} + \frac{(k+1)\beta}{(x-\beta)^{k+2}} \right\} \\ &= (-1)^{k+1} (k+1)! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{(k+1)+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{(k+1)+1}} \right\} \end{aligned}$$

となるから、 $n=k+1$ のときも①が成り立つ。

以上[1], [2]より、数学的帰納法から①が示された。

(証明終)

(2)

(i)

$x^2 - bx + c = 0$ の解を α, β とすると、

$$x^2 - bx + c = (x-\alpha)(x-\beta)$$

となる。 $b^2 - 4c > 0$ より、 α, β は異なる実数解であるから、 $\alpha - \beta \neq 0$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x}{x^2 - bx + c} \\ &= \frac{x}{(x-\alpha)(x-\beta)} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(\frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} f(x) \end{aligned}$$

より、

$$h^{(n)}(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} f^{(n)}(x)$$

が成り立つ。ここで、2 次方程式の解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = b \\ \alpha\beta = c \end{cases}$$

が成り立つことから、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{c^n}{n!} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta} f^{(n)}(0) \\ &= \frac{(\alpha\beta)^n}{n!} \cdot \frac{1}{\alpha - \beta} \cdot (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(0-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(0-\beta)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{(\alpha\beta)^n}{\alpha - \beta} \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{(\alpha\beta)^n} \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

(ii)

(i)の結果より、

$$\begin{aligned} a_{n+2} - ba_{n+1} + ca_n &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - (\alpha + \beta) \cdot \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \alpha\beta \cdot \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} - \alpha^{n+2} + \alpha\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}\beta + \beta^{n+2} + \alpha^{n+1}\beta - \alpha\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、与えられた式は成り立つ。

(証明終)

[2]

(1)

曲線 C_1 上の点 $(t, at^2 - b)$ と原点との距離の 2 乗を $g(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} g(t) &= t^2 + (at^2 - b)^2 \\ &= t^2 + a^2 t^4 - 2abt^2 + b^2 \\ &= a^2 \left(t^2 - \frac{2ab-1}{2a^2} \right)^2 + \frac{4ab-1}{4a^2} \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $a > \frac{1}{2}, b > 1$ より $\frac{2ab-1}{2a^2} > 0$ であるから、 $t = \pm \sqrt{\frac{2ab-1}{2a}}$ の 2 点において、

$g(t)$ は最小値 $\frac{4ab-1}{4a^2}$ をとる。 $a > \frac{1}{2}, b > 1$ より $\frac{4ab-1}{4a^2} > 0$ であるから、常に $g(t) > 0$ である。

したがって、曲線 C_1 と円 C_2 が 2 点で接するための必要十分条件は、

$g(t)$ の最小値が 1 である ・・・①

$g(t)$ の最小値を与える t がちょうど 2 個である ・・・②

の双方を満たすことである。条件②は達成されている。条件①が満たされるとき、

$$\frac{4ab-1}{4a^2} = 1 \Leftrightarrow b = a + \frac{1}{4a}$$

が成り立ち、これが求める a と b の関係である。

(答) $a + \frac{1}{4a} = b$

(2)

C_1 と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} ax^2 - b &= 0 \\ \therefore x &= \pm \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\because a > \frac{1}{2}, b > 1 \right) \end{aligned}$$

である。したがって、 C_1 と x 軸で囲まれる領域を D_1 とすると、領域 D_1 の面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} (ax^2 - b) dx &= a \int_{-\sqrt{\frac{b}{a}}}^{\sqrt{\frac{b}{a}}} \left(x + \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \left(x - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) dx \\ &= \frac{a}{6} \left(\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^3 \\ &= \frac{4a}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であり、(1)の結果を代入すると、

$$\frac{4a}{3} \left\{ \frac{1}{a} \cdot \left(a + \frac{1}{4a} \right) \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{4a}{3} \left(\frac{4a^2 + 1}{4a^2} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{6a^2}$$

となる。一方、 C_2 と x 軸で囲まれる領域を D_2 とおくと、領域 D_2 の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

であり、この領域はすべて領域 D_1 に含まれる。したがって、求める面積 S は領域 D_1 の面積と領域 D_2 の面積の差に等しく、

$$S = \frac{(4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{6a^2} - \frac{\pi}{2}$$

となる。

(答) $S = \frac{(4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{6a^2} - \frac{\pi}{2}$

(3)

S を a で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dS}{da} &= \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{3}{2} \cdot 8a \cdot (4a^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot a^2 - (4a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \cdot 2a}{a^4} \\ &= \frac{(2a^2 - 1)(4a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{3a^3} \left(\because a > \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{2}a + 1)(\sqrt{2}a - 1)(4a^2 + 1)^{\frac{1}{2}}}{3a^3} \end{aligned}$$

となる。したがって、 S の増減表は以下に示す通りである。

a	$\frac{1}{2}$	...	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	...
$\frac{dS}{da}$		-	0	+
S				

増減表より、 $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のときに S は最小値

$$S = \frac{\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}}{6 \cdot \frac{1}{2}} - \frac{\pi}{2} = \frac{3^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{\pi}{2} = \sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$$

をとる。

(答) $\sqrt{3} - \frac{\pi}{2}$

[3]

- (1) 3点の座標より、 $\triangle OAB$ の面積は

$$S = \left| \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} \right|$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} |\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta| &= \frac{1}{4} |(x_1 + y_1 i)(\overline{x_2 + y_2 i}) - (\overline{x_1 + y_1 i})(x_2 + y_2 i)| \\ &= \frac{1}{4} |(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i) - (x_1 - y_1 i)(x_2 + y_2 i)| \\ &= \frac{1}{4} |(x_1 x_2 + x_2 y_1 i - x_1 y_2 i + y_1 y_2) - (x_1 x_2 - x_2 y_1 i + x_1 y_2 i + y_1 y_2)| \\ &= \frac{1}{4} |-2i(x_1 y_2 - x_2 y_1)| \\ &= \left| \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} \right| \end{aligned}$$

となるから

$$S = \frac{1}{4} |\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta|$$

が示された。

(証明終)

- (2) (i) $|\alpha - 1| + |\alpha + 1| = k$ の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} k^2 &= |\alpha - 1|^2 + 2|\alpha - 1||\alpha + 1| + |\alpha + 1|^2 \\ &= (\alpha - 1)(\overline{\alpha - 1}) + (\alpha + 1)(\overline{\alpha + 1}) + 2|(\alpha - 1)(\alpha + 1)| \\ &= (\alpha - 1)(\bar{\alpha} - 1) + (\alpha + 1)(\bar{\alpha} + 1) + 2|\alpha^2 - 1| \\ &= 2|\alpha|^2 + 2 + 2|\alpha^2 - 1| \\ &= 2|\alpha|^2 + 2 + 2|-\beta^2| \quad (\because \alpha^2 + \beta^2 = 1) \\ &= 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 + 2 \\ \therefore |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= \frac{k^2}{2} - 1 \end{aligned}$$

となるから、 $|\alpha|^2 + |\beta|^2$ は α, β によらず一定であることが示された。

(証明終)

- (ii) (1)で得られた式の両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{16} |\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta|^2 \\ &= \frac{1}{16} (\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta)(\overline{\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta}) \\ &= \frac{1}{16} (\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta)(\bar{\alpha} \beta - \alpha \bar{\beta}) \\ &= \frac{1}{16} (\alpha \bar{\alpha} \beta \bar{\beta} - \bar{\alpha}^2 \beta^2 - \alpha^2 \bar{\beta}^2 + \alpha \bar{\alpha} \beta \bar{\beta}) \\ &= \frac{1}{16} \left\{ 2|\alpha|^2 |\beta|^2 - (\bar{\alpha}^2 \beta^2 + \alpha^2 \bar{\beta}^2) \right\} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ より $\overline{\alpha^2 + \beta^2} = \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2 = 1$ であるから、

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}^2 \beta^2 + \alpha^2 \bar{\beta}^2 &= (1 - \bar{\beta}^2) \beta^2 + \alpha^2 (1 - \bar{\alpha}^2) \\ &= \alpha^2 + \beta^2 - \alpha^2 \bar{\alpha}^2 - \beta^2 \bar{\beta}^2 \\ &= 1 - |\alpha|^4 - |\beta|^4 \quad (\because \alpha^2 + \beta^2 = 1) \end{aligned}$$

と変形できる。したがって、

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{16} (2|\alpha|^2 |\beta|^2 + |\alpha|^4 + |\beta|^4 - 1) \\ &= \frac{1}{16} \left\{ (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{16} \left\{ \left(\frac{k^2}{2} - 1 \right)^2 - 1 \right\} \end{aligned}$$

となるから、 S^2 は α, β によらず一定であり、 $S > 0$ より S も一定である。

(証明終)

[4]

(1)

$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{p}{2}$ より、倍角の公式を利用すると、

$$\cos \frac{2\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1 = \frac{p^2}{2} - 1$$

となる。したがって①より、

$$\begin{aligned} 4\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} &= 1 \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{p^2}{2} - 1 \right) \cdot \frac{p}{2} &= 1 \\ \Leftrightarrow p(p^2 - 2) &= 1 \\ \Leftrightarrow p^3 - 2p - 1 &= 0 \\ \therefore (p+1)(p^2 - p - 1) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $p = 2\cos \frac{\pi}{5} > 0$ より $p+1 \neq 0$ であるから、

$$\begin{aligned} p^2 - p - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 &= p+1 \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$$\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0), \overrightarrow{OB} = (b_1, b_2, 0) \text{ より}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + 0 \cdot 0 = b_1$$

である。また、 $\angle AOB = \frac{3\pi}{5}, |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ より

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB = \cos \frac{3\pi}{5}$$

であり、

$$\begin{aligned} \cos \frac{3\pi}{5} &= -\cos \left(\pi - \frac{3\pi}{5} \right) \\ &= -\cos \frac{2\pi}{5} \\ &= 1 - \frac{p^2}{2} \\ &= 1 - \frac{p+1}{2} \quad (\because p^2 = p+1) \\ &= \frac{1-p}{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$b_1 = \frac{1-p}{2}$$

となる。

(証明終)

(3)

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{3\pi}{5}, |\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1 \text{ より、}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = \frac{1-p}{2}$$

となる。ここで、 $\alpha = \frac{1-p}{2}$ とおく。また、 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OE}$ の内積をそれぞれ計算すると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} &= b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\ \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE} &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 1 = c_3 \end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OE}$ と $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OE}$ の内積をそれぞれ計算すると、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = k|\overrightarrow{OA}|^2 + l\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + l|\overrightarrow{OB}|^2 + m\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OE} \\ |\overrightarrow{OC}|^2 = k\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE} \\ \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OA} + l\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OB} + m|\overrightarrow{OE}|^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = k + l\alpha & \dots \textcircled{1} \\ \alpha = k\alpha + l & \dots \textcircled{2} \\ 1 = k\alpha + l\alpha + mc_3 & \dots \textcircled{3} \\ c_3 = m & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

といった関係を得る。まず①と②について、各辺の差をとると、

$$0 = k(1-\alpha) + l(\alpha-1)$$

$$\Leftrightarrow k(\alpha-1) = l(\alpha-1)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \alpha - 1 &= \frac{1-p}{2} - 1 \\ &= \frac{-p-1}{2} \\ &\neq 0 \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

であるから、 $k = l$ が成り立つ。これを①に代入すると、

$$\begin{aligned} \alpha &= l + l\alpha \\ \Leftrightarrow l &= \frac{\alpha}{\alpha+1} \end{aligned}$$

となり、これと④を③に代入すると、

$$\begin{aligned} 1 &= 2 \frac{\alpha^2}{\alpha+1} + m^2 \\ \Leftrightarrow m^2 &= 1 - \frac{2\alpha^2}{\alpha+1} \end{aligned}$$

を得る。ここで、 $\alpha = \frac{1-p}{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} m^2 &= 1 - \frac{2\left(\frac{1-p}{2}\right)^2}{\frac{1-p}{2} + 1} \\ &= 1 + \frac{(p-1)^2}{p-3} \\ &= \frac{p^2 - p - 2}{p-3} \\ &= \frac{p+1-p-2}{p-3} \quad (\because p^2 = p+1) \\ &= -\frac{1}{p-3} \end{aligned}$$

となり、分母と分子にそれぞれ $(p+2)$ をかけて変形すると、

$$\begin{aligned} m^2 &= -\frac{p+2}{(p-3)(p+2)} \\ &= -\frac{p+2}{p^2 - p - 6} \\ &= -\frac{p+2}{p+1-p-6} \quad (\because p^2 = p+1) \\ &= \frac{p+2}{5} \end{aligned}$$

を得る。

(証明終)

(4)

$$\begin{aligned} \sin \angle AOB &= \sin \frac{3\pi}{5} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \frac{3\pi}{5}} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1-p}{2} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3+2p-p^2}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3+2p-p-1}}{2} \quad (\because p^2 = p+1) \\ &= \frac{\sqrt{2+p}}{2} \end{aligned}$$

より、 $\triangle OAB$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2+p}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{p+2}}{4} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $\triangle OAB$ を四面体の底面と考え、これは xy 平面上に存在するから、四面体の高さは点 C の z 座標 c_3 に等しい。したがって、 $p > 0$ および $p+2 > 0$ に注意すると、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} S c_3 \\ &= \frac{1}{3} S m \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{p+2}}{4} \cdot \sqrt{\frac{p+2}{5}} \quad (\because p+2 > 0) \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{p^2 + 4p + 4}{5}} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{\frac{p^2 + 4(p+1)}{5}} \\ &= \frac{1}{12} \sqrt{p^2} \quad (\because p^2 = p+1) \\ &= \frac{p}{12} \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

となる。

(証明終)