

平成 28 年度 入学者選抜学力検査問題

数 学 (理系 β)

数学Ⅰ，数学A
数学Ⅱ，数学B
数学Ⅲ

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで，問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で 4 題あります。また，解答用紙は 4 枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後，すべての解答用紙に受験番号，志望学部及び氏名を記入してください。受験番号の記入欄は各解答用紙に 2 箇所あります。
5. 解答は各問，指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 解答を指定された番号以外の解答用紙に記入した場合，採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を書いた場合，その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
9. 試験終了後，問題冊子は持ち帰ってください。

〔 1 〕 （配点 50） n を自然数とする。このとき、次の問いに答えなさい。

(1) α, β を実数とし、

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-\alpha} - \frac{\beta}{x-\beta}$$

とする。 $f(x)$ の第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について、次の等式が成り立つことを、
数学的帰納法によって証明しなさい。

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! \left\{ \frac{\alpha}{(x-\alpha)^{n+1}} - \frac{\beta}{(x-\beta)^{n+1}} \right\}$$

(2) b, c を $b^2 > 4c$ を満たす実数とし、

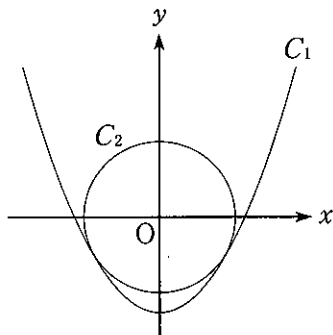
$$h(x) = \frac{x}{x^2 - bx + c}$$

とする。また、 $h(x)$ の第 n 次導関数 $h^{(n)}(x)$ に対し、 $a_n = \frac{c^n h^{(n)}(0)}{n!}$ とおく。

(i) 2 次方程式 $x^2 - bx + c = 0$ の解を α, β とする。 a_n を α, β, n を用いて表しなさい。

(ii) $a_{n+2} - ba_{n+1} + ca_n = 0$ が成り立つことを示しなさい。

- [2] (配点 50) $a > \frac{1}{2}$, $b > 1$ とし, 放物線 $y = ax^2 - b$ を C_1 , 原点を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。 C_1 と C_2 の共有点が下図のように 2 個であるとき, 次の問いに答えなさい。



- (1) a と b の関係を式で表しなさい。
- (2) C_1 と x 軸で囲まれ, かつ C_2 の内部に含まれない部分の面積を S とする。
 S を a を用いて表しなさい。
- (3) a が $a > \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき, (2) の S の最小値を求めなさい。

- [3] (配点 50) 座標平面上の 3 点 $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を頂点とする $\triangle OAB$ を考える。

$$\alpha = x_1 + y_1 i, \quad \beta = x_2 + y_2 i$$

とすると、次の問いに答えなさい。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) $\triangle OAB$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{4} |\alpha \bar{\beta} - \bar{\alpha} \beta|$$

で表されることを示しなさい。ただし、 $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ はそれぞれ α , β と共役な複素数である。

- (2) k を 2 より大きい定数とする。 α , β が

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \text{かつ} \quad |\alpha - 1| + |\alpha + 1| = k$$

を満たすとき、次の各値は α , β によらず一定であることを示しなさい。

(i) $|\alpha|^2 + |\beta|^2$

(ii) $\triangle OAB$ の面積 S

- [4] (配点 50) 点 $O(0, 0, 0)$ と点 $A(1, 0, 0)$ に対して、点 $B(b_1, b_2, 0)$ と点 $C(c_1, c_2, c_3)$ は

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = \frac{3\pi}{5}, \quad |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1$$

を満たしているとする。 $b_2 > 0$, $c_3 > 0$, また, $p = 2 \cos \frac{\pi}{5}$ とするとき, 以下の問いに答えなさい。ただし, 次の等式①を証明なしに用いてもよい。

$$4 \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(1) 等式 $p^2 = p + 1$ が成り立つことを示しなさい。

(2) $b_1 = \frac{1-p}{2}$ であることを示しなさい。

(3) 点 $E(0, 0, 1)$ に対して, $\overrightarrow{OC}$ を実数 k, l, m を用いて

$$\overrightarrow{OC} = k \overrightarrow{OA} + l \overrightarrow{OB} + m \overrightarrow{OE}$$

と表すとき, $m^2 = \frac{2+p}{5}$ であることを示しなさい。

(4) 四面体 $OABC$ の体積を V とする。 $V = \frac{p}{12}$ であることを示しなさい。