

〔1〕

(1)

$f(x)=x^3$ より、 $f'(x)=3x^2$ であるから、曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$y-f(a)=3a^2(x-a) \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。この曲線と、直線 $y=x$ との交点を求める。①に $y=x$ を代入して、

$$x-f(a)=3a^2x-3a^3$$

$$\Leftrightarrow (3a^2-1)x=2a^3$$

$$\therefore x=\frac{2a^3}{3a^2-1} \quad (\because 3a^2-1>0)$$

が得られるので、交点の座標は、 $(x, y)=\left(\frac{2a^3}{3a^2-1}, \frac{2a^3}{3a^2-1}\right)$ となる。以上より、 $b=\frac{2a^3}{3a^2-1}$ である。

$$(\text{答}) \quad b=\frac{2a^3}{3a^2-1}$$

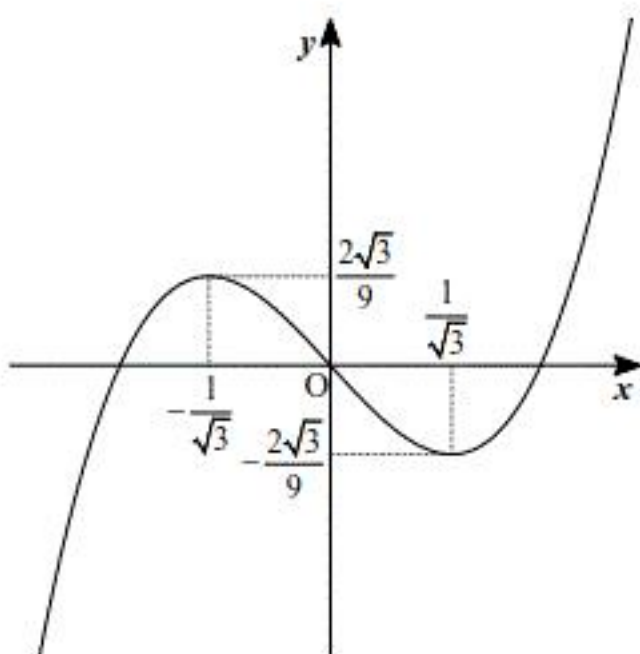
(2)

$$y'=3x^2-1=3\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

であるから、増減表は次のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$

したがって、 $y=f(x)-x$ は $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極大値 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとり、 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ で極小値 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ をとると分かる。また、グラフの概形は次のようになる。



$$(\text{答}) \quad \text{極大値} \frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{極小値} -\frac{2\sqrt{3}}{9}, \text{概形は上図}$$

(3)

(1)より、 $b=\frac{2a^3}{3a^2-1}$ であるから、

$$a-b=\frac{6}{11}$$

$$\Leftrightarrow a-\frac{2a^3}{3a^2-1}=\frac{6}{11}$$

$$\Leftrightarrow 11a^3-18a^2-11a+6=0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)(11a^2+4a-3)=0$$

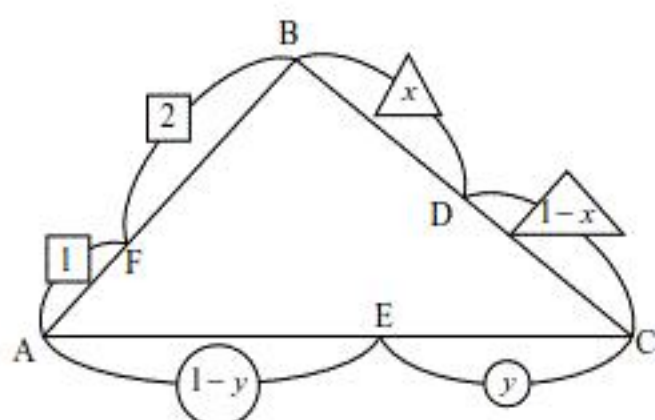
$$\therefore a=2, \frac{-2\pm\sqrt{37}}{11}$$

が得られるが、この中で $a^2 \geq 1$ を満たすのは $a=2$ のみである。

$$(\text{答}) \quad a=2$$

[2]

(1)



$x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}$ のとき,

$$\begin{aligned}\triangle AFE : \triangle ABC &= AF \cdot AE \cdot \sin A : AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= 1 : 9\end{aligned}$$

となるので, $S_1 = \triangle AFE = \frac{1}{9} \triangle ABC = \frac{1}{9}$ となる。同様にして,

$$\triangle BDF : \triangle BCA = 4 : 9$$

$$\triangle CED : \triangle CAB = 2 : 9$$

であるから, $\triangle BDF = \frac{4}{9}, \triangle CED = \frac{2}{9}$ となる。以上より,

$$S_2 = 1 - (\triangle AFE + \triangle BDF + \triangle CED)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \right)$$

$$= \frac{2}{9}$$

が得られる。

$$(答) \quad S_1 = \frac{1}{9}, S_2 = \frac{2}{9}$$

(2)

(1)と同様にして考えると,

$$\triangle AFE = \frac{1-y}{3}, \triangle BDF = \frac{2x}{3}, \triangle CED = (1-x)y$$

となるので,

$$S_2 = 1 - (\triangle AFE + \triangle BDF + \triangle CED)$$

$$= 1 - \left(\frac{1-y}{3} + \frac{2x}{3} + (1-x)y \right)$$

$$= xy - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$$

が得られる。

$$(答) \quad S_2 = xy - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$$

(3)

DE//BA であるとき, 平行線と比の定理より, $CD : CB = CE : CA$ となるから,

$$CD : CB = CE : CA$$

$$\Leftrightarrow (1-x) : 1 = y : 1$$

$$\therefore y = 1-x$$

が成り立つ。これより,

$$S_2 = -x^2 + x = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$

となり, $0 < x < 1$ より, S_2 は $x = \frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{1}{4}$ をとると分かる。

$$(答) \quad \frac{1}{4}$$

[3]

(1)

[1] $r=1$ のとき

$S_n = na$ であるから,

$$\frac{S_{2m}}{S_m} = \frac{2ma}{ma} = 2$$

となる。

[2] $r \neq 1$ のとき

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ であるから,

$$\frac{S_{2m}}{S_m} = \frac{\frac{a(r^{2m} - 1)}{r - 1}}{\frac{a(r^m - 1)}{r - 1}} = r^m + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

①は, $r=1$ のときも成立するので, $r > 0$ のとき, $\frac{S_{2m}}{S_m} = r^m + 1$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_{2m}}{S_m} = r^m + 1$$

(2)

[1] $r=1$ のとき

$S_n = na$ であるから,

$$\frac{S_{3m}}{S_m} = \frac{3ma}{ma} = 3$$

となる。

[2] $r \neq 1$ のとき

$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ であるから,

$$\frac{S_{3m}}{S_m} = \frac{\frac{a(r^{3m} - 1)}{r - 1}}{\frac{a(r^m - 1)}{r - 1}} = r^{2m} + r^m + 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。

②は, $r=1$ のときも成立するので, $r > 0$ のとき, $\frac{S_{3m}}{S_m} = r^{2m} + r^m + 1$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{S_{3m}}{S_m} = r^{2m} + r^m + 1$$

(3)

(1)より, $r^m + 1 = \frac{S_{2m}}{S_m} = 5$ であるので, $r^m = 4$ となる。これより,

$$\frac{S_{6m}}{S_{3m}} = r^{3m} + 1 = 65$$

となるので,

$$\begin{aligned} S_{6m} &= 65 \cdot S_{3m} \\ &= 65 \cdot (r^{2m} + r^m + 1) \cdot S_m \\ &= 65 \cdot (4^2 + 4^1 + 1) \cdot 4 \\ &= 5460 \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad S_{6m} = 5460$$

〔4〕

(1)

カードの並べ方は全部で6!通りあり、それぞれ同様に確からしい。左から3番目のカードが3であるとき、残り5枚のカードの並べ方は5!通りあるので、求める確率は、

$$\frac{5!}{6!} = \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}$

(2)

6枚のカードから2枚を選び、数字の大きいほうが左に来るようにして両端に並べる方法は ${}_6C_2$ 通りあり、残った4枚を一行に並べる方法は4!通りあるので、求める確率は、

$$\frac{{}_6C_2 \cdot 4!}{6!} = \frac{1}{2}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}$

(3)

(2)と同様にして考えると、6枚のカードから3枚を選び、数字の大きい順に左から1, 3, 5番目に並べる方法は ${}_6C_3$ 通りあり、残った3枚を数字の大きい順に左から2, 4, 6番目に並べる方法は1通りしかないので、求める確率は、

$$\frac{{}_6C_3}{6!} = \frac{1}{36}$$

となる。

(答) $\frac{1}{36}$