

[1]

(1)

$y=f(x)$ について、

$$f(x)=(x+a)^2+a^2-a+1$$

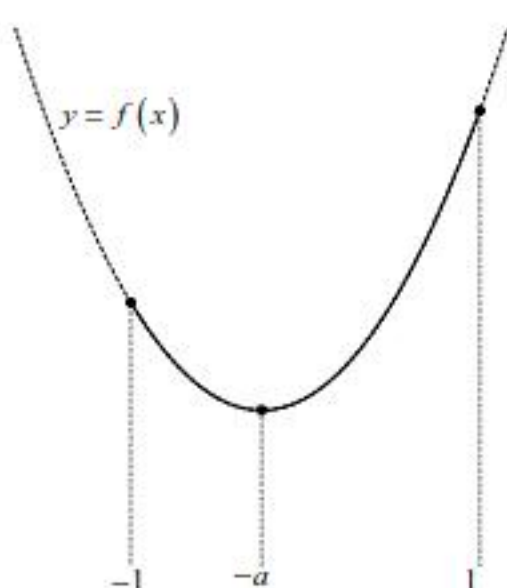
と平方完成できるから、頂点の座標は、 $(-a, a^2-a+1)$ である。

(答) $(-a, a^2-a+1)$

(2)

a の範囲で場合分けを行う。

[1] $0 > -a > -1$ すなわち $0 < a < 1$ のとき、



グラフの概形は上図のようになるから、 $-1 \leq x \leq 1$ における最小値は

$$f(-a) = a^2 - a + 1$$

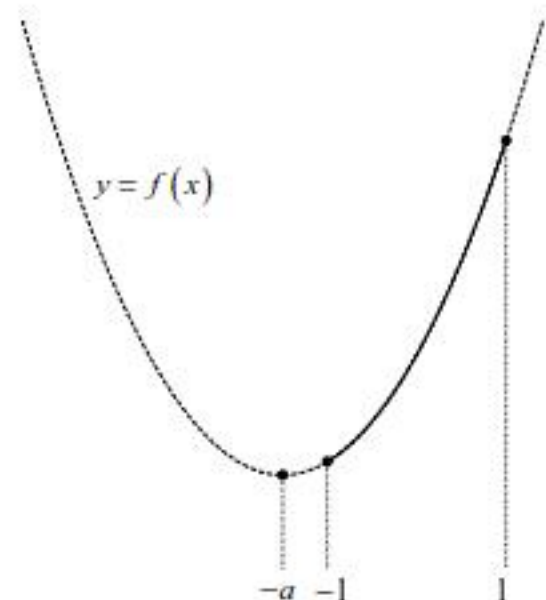
となる。これが $2a$ と等しくなるのは、

$$a^2 - a + 1 = 2a$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

のときである。これらのうち、 $0 < a < 1$ を満たすものは $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ である。

[2] $-a \leq -1$ すなわち $a \geq 1$ のとき



グラフの概形は上図のようになるから、 $-1 \leq x \leq 1$ における最小値は

$$f(-1) = 2a^2 - 3a + 2$$

となる。これが $2a$ と等しくなるのは、

$$2a^2 - 3a + 2 = 2a$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)(a-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, 2$$

のときである。これらのうち、 $a \geq 1$ を満たすものは $a = 2$ である。

以上[1], [2]より、求める a は、 $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 2$ である。

(答) $a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 2$

(3)

(2)と同様に場合分けを行う。

[1] $0 > -a > -1$ すなわち $0 < a < 1$ のとき、

$$m = a^2 - a + 1$$

$$M = f(1) = 2a^2 + a + 2$$

であるから、

$$3m - 2M + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -a^2 - 5a + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}$$

となる。このうち、 $0 < a < 1$ を満たすのは、 $a = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}$ である。

[2] $-a \leq -1$ すなわち $a \geq 1$ のとき

$$m = 2a^2 - 3a + 2$$

$$M = f(1) = 2a^2 + a + 2$$

であるから、

$$3m - 2M + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 11a + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2a-1)(a-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, 5$$

となる。このうち、 $a \geq 1$ を満たすのは $a = 5$ である。

以上[1], [2]より、求める a は、 $a = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}, 5$ である。

(答) $a = \frac{-5 + \sqrt{33}}{2}, 5$

[2]

(1)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \cos \alpha < 1$ であるから,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25} \\ \cos 2\beta &= 2 \cos^2 \beta - 1 = \frac{17}{32}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \cos 2\beta = \frac{17}{32}$$

(2)

$f(x) = \sin x$ とおく。 $f(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で単調増加であり, $f(0) = 0$ より, この範囲で

$f(x) > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &< \alpha < \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{4} &< \sin \alpha < \sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} &< \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} = \frac{50}{100} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{16}{25} = \frac{64}{100} \\ \sin^2 \frac{\pi}{3} &= \frac{3}{4} = \frac{75}{100}\end{aligned}$$

であるから, $\sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}$ は成り立つ。以上より, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ が示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}\cos \beta - \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{7 - 4\sqrt{2}}{8} \\ &> \frac{7 - 4 \cdot \frac{3}{2}}{8} \left(\because \sqrt{2} < \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \\ &> 0 \\ \cos 0 - \cos \beta &= 1 - \frac{7}{8} \\ &= \frac{1}{8} \\ &> 0\end{aligned}$$

より,

$$\cos \frac{\pi}{4} < \cos \beta < \cos 0$$

である。ここで, x の関数 $\cos x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で単調減少することと, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ であることか

ら,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

が成立する。次に, $g(x) = \cos 2x$ とおく。 $g(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{4}$ で単調減少であり, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ より,

この範囲で $g(x) > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{12} &< \beta < \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} &< \cos 2\beta < \cos 2 \cdot \frac{\pi}{12} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{3} &< \cos^2 2\beta < \cos^2 \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

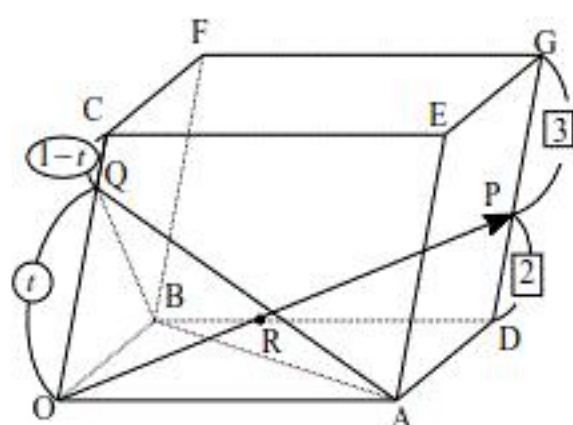
が成り立つ。ここで, $\cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} = \frac{256}{1024}$, $\cos^2 2\beta = \left(\frac{17}{32}\right)^2 = \frac{289}{1024}$, $\cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = \frac{768}{1024}$ であるから,

$\cos^2 \frac{\pi}{3} < \cos^2 2\beta < \cos^2 \frac{\pi}{6}$ は成り立つので, $\frac{\pi}{12} < \beta < \frac{\pi}{6}$ は示された。

(証明終)

[3]

(1)



図より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \vec{a} + \vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \\ \overrightarrow{OQ} &= t\vec{c}\end{aligned}$$

である。R が直線 OP 上にあることより、 $\overrightarrow{OR}$ は実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR} &= k\overrightarrow{OP} \\ &= k\vec{a} + k\vec{b} + \frac{2}{5}k\vec{c} \\ &= k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} + \frac{2k}{5t}\overrightarrow{OQ}\end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、R は平面 ABQ 上の点であるから、係数について、

$$k + k + \frac{2k}{5t} = 1$$

が成り立つ。これを k について解くと、 $k = \frac{5t}{2(5t+1)}$ が得られる。よって、

$$\overrightarrow{OR} = \frac{5t}{2(5t+1)}\vec{a} + \frac{5t}{2(5t+1)}\vec{b} + \frac{t}{5t+1}\vec{c}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OR} = \frac{5t}{2(5t+1)}\vec{a} + \frac{5t}{2(5t+1)}\vec{b} + \frac{t}{5t+1}\vec{c}$$

(2)

三角形 ABQ の重心を G とする。 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OQ}$ であるので、これが $\overrightarrow{OR}$ と一致する

とき、係数を比較して、

$$\begin{aligned}\begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ \frac{2k}{5t} = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ t = \frac{2}{5} \end{cases}\end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{2}{5}$$

(3)

線分 BQ を 3:2 に内分する点を S とする。 $\overrightarrow{OS} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OQ}$ であり、また、条件より、R は直

線 AS 上にあるから、 $\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OS}$ とおける。これより、

$$\overrightarrow{OR} = (1-s)\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}s\overrightarrow{OB} + \frac{3}{5}s\overrightarrow{OQ}$$

であるので、係数を比較して、

$$\begin{aligned}k &= 1-s \\ k &= \frac{2}{5}s \\ \frac{2k}{5t} &= \frac{3}{5}s\end{aligned}$$

が得られる。これらを連立して解くと、 $(k, s, t) = \left(\frac{2}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{15}\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{4}{15}$$

[4]

(1)

$f'(x) = \frac{1 - \log x}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2 \log x - 3}{x^3}$ であるから、増減表は次のようになる。

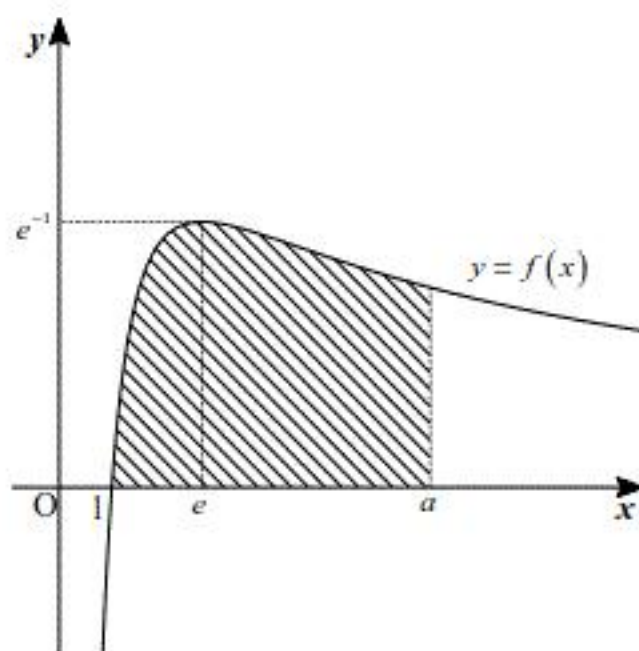
x	0	...	e	...	$e^{\frac{3}{2}}$	...
$f'(x)$	/	+	0	-	-	-
$f''(x)$	/	-	-	-	0	+
$f(x)$	/	↗	e^{-1}	↘	$\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}$	↘

したがって、 $f(x)$ は $x=e$ で極大値 e^{-1} をとり、変曲点は $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$ である。

(答) 極大値 e^{-1} ($x=e$), 変曲点 $\left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$

(2)

求める面積は、下図の斜線部である。



求める面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^a \frac{\log x}{x} dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\log x)^2 \right]_1^a \\
 &= \frac{1}{2} (\log a)^2
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2} (\log a)^2$