

【1】

(1)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ より, $0 < \cos \alpha < 1$ であるから,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \\ &= \sqrt{1 - \frac{16}{25}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{24}{25} \\ \cos 2\beta &= 2 \cos^2 \beta - 1 = \frac{17}{32}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sin 2\alpha = \frac{24}{25}, \cos 2\beta = \frac{17}{32}$$

(2)

$f(x) = \sin x$ とおく。 $f(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で単調増加であり, $f(0) = 0$ より, この範囲で

$f(x) > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &< \alpha < \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{4} &< \sin \alpha < \sin \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} &< \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

が成り立つ。ここで,

$$\begin{aligned}\sin^2 \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} = \frac{50}{100} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{16}{25} = \frac{64}{100} \\ \sin^2 \frac{\pi}{3} &= \frac{3}{4} = \frac{75}{100}\end{aligned}$$

であるから, $\sin^2 \frac{\pi}{4} < \sin^2 \alpha < \sin^2 \frac{\pi}{3}$ は成り立つ。以上より, $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ が示された。

(証明終)

(3)

$$\begin{aligned}\cos \beta - \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{7}{8} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{7 - 4\sqrt{2}}{8} \\ &> \frac{7 - 4 \cdot \frac{3}{2}}{8} \left(\because \sqrt{2} < \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \\ &> 0 \\ \cos 0 - \cos \beta &= 1 - \frac{7}{8} \\ &= \frac{1}{8} \\ &> 0\end{aligned}$$

より,

$$\cos \frac{\pi}{4} < \cos \beta < \cos 0$$

である。ここで, x の関数 $\cos x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ で単調減少することと, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ であることが

ら,

$$0 < \beta < \frac{\pi}{4}$$

が成立する。次に, $g(x) = \cos 2x$ とおく。 $g(x)$ は $0 < x < \frac{\pi}{4}$ で単調減少であり, $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ より,

この範囲で $g(x) > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{12} &< \beta < \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow \cos 2 \cdot \frac{\pi}{6} &< \cos 2\beta < \cos 2 \cdot \frac{\pi}{12} \\ \Leftrightarrow \cos^2 \frac{\pi}{3} &< \cos^2 2\beta < \cos^2 \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

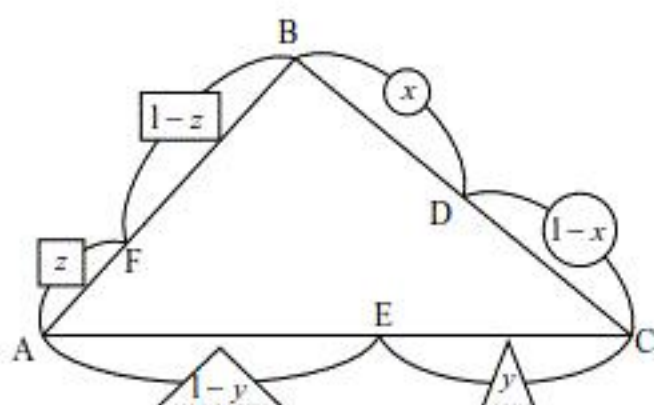
が成り立つ。ここで, $\cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4} = \frac{256}{1024}$, $\cos^2 2\beta = \left(\frac{17}{32}\right)^2 = \frac{289}{1024}$, $\cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4} = \frac{768}{1024}$ であるから,

$\cos^2 \frac{\pi}{3} < \cos^2 2\beta < \cos^2 \frac{\pi}{6}$ は成り立つので, $\frac{\pi}{12} < \beta < \frac{\pi}{6}$ は示された。

(証明終)

[2]

(1)



$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{3} \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} \triangle AFE : \triangle ABC &= AF \cdot AE \cdot \sin A : AB \cdot AC \cdot \sin A \\ &= 1 : 9 \end{aligned}$$

となるので, $S_1 = \triangle AFE = \frac{1}{9} \triangle ABC = \frac{1}{9}$ となる。同様にして,

$$\triangle BDF : \triangle BCA = 4 : 9$$

$$\triangle CED : \triangle CAB = 2 : 9$$

であるから, $\triangle BDF = \frac{4}{9}$, $\triangle CED = \frac{2}{9}$ となる。以上より,

$$S_2 = 1 - (\triangle AFE + \triangle BDF + \triangle CED)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \right) \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{1}{9}, S_2 = \frac{2}{9}$$

(2)

(1)と同様に考えると,

$$\triangle AFE = (1-y)z, \triangle BDF = (1-z)x, \triangle CED = (1-x)y$$

となるので,

$$\begin{aligned} S_2 &= 1 - (\triangle AFE + \triangle BDF + \triangle CED) \\ &= 1 - ((1-y)z + (1-z)x + (1-x)y) \\ &= 1 - x - y - z + xy + yz + zx \end{aligned}$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad S_2 = 1 - x - y - z + xy + yz + zx$$

(3)

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とおく。

$$\overrightarrow{AD} = (1-x)\vec{b} + x\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AE} = (1-y)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AF} = z\vec{b}$$

であるから, $\triangle ABC$, $\triangle DEF$ の重心をそれぞれ G_1 , G_2 とおくと,

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{AG_2} = \frac{1-x+z}{3}\vec{b} + \frac{1+x-y}{3}\vec{c}$$

となる。 $\vec{b}$, $\vec{c}$ は1次独立であるから, 係数を比較して,

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1-x+z}{3} \\ \frac{1}{3} = \frac{1+x-y}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z$$

が得られる。また, $S_2 = \frac{1}{3}$ より,

$$1 - x - y - z + xy + yz + zx = \frac{1}{3}$$

である。これに $x = y = z$ を代入して解くと,

$$\begin{aligned} 1 - 3x + 3x^2 &= \frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 9x + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3x-1)(3x-2) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって, $(x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

[3]

(1)

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{5} \pi \right) = \cos \frac{2}{5} \pi$$

$$\cos \frac{\pi}{10} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{5} \pi \right) = \sin \frac{2}{5} \pi$$

であるから、

$$\alpha = \sin \frac{\pi}{10} + i \cos \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2}{5} \pi + i \sin \frac{2}{5} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \cos \frac{2}{5} \pi + i \sin \frac{2}{5} \pi$$

(2)

ドモアブルの定理より、

$$\alpha^{kl} = \cos \left(2\pi \cdot \frac{kl}{5} \right) + i \sin \left(2\pi \cdot \frac{kl}{5} \right)$$

となる。これより、 $\alpha^{kl} = 1$ となるためには、 $\frac{kl}{5}$ が整数となればよい。これは、 kl が 5 の倍数

であることと同値である。また、 $1 \leq k \leq 6$ 、 $1 \leq l \leq 6$ であるので、 $k=5$ または $l=5$ であることと同値である。この事象の余事象は $k \neq 5$ かつ $l \neq 5$ であり、またさいころの目の出方は同様に確からしいことから、求める確率は、

$$1 - \left(\frac{5}{6} \right)^2 = \frac{11}{36}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{11}{36}$$

(3)

$$\alpha^1 = \alpha^6 = \cos \frac{2}{5} \pi + i \sin \frac{2}{5} \pi$$

$$\alpha^2 = \cos \frac{4}{5} \pi + i \sin \frac{4}{5} \pi$$

$$\alpha^3 = \cos \frac{6}{5} \pi + i \sin \frac{6}{5} \pi$$

$$\alpha^4 = \cos \frac{8}{5} \pi + i \sin \frac{8}{5} \pi$$

$$\alpha^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi$$

であるから、 $\alpha^k, \alpha^l, \alpha^m$ が異なる 3 つの複素数となるためには、 k, l, m がすべて異なり、かつ 1, 6 が同時に出なければよい。 k, l, m がすべて異なる場合の数は ${}_6P_3$ 、 k, l, m がすべて異なり、かつ 1, 6 が同時に出る場合の数は $4 \cdot 3!$ である。したがって、求める確率は、

$$\frac{{}_6P_3 - 4 \cdot 3!}{6^3} = \frac{4}{9}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{9}$$

[4]

(1)

絶対値記号を外すことを考えると,

$$f(x) = \begin{cases} e^a - e^x & (x \leq a) \\ e^x - e^a & (x \geq a) \end{cases}$$

となる。 $x < a$ のとき、 $f'(x) = -e^x$ であるから、 l の方程式は,

$$y - f(0) = f'(0)x$$

$$\therefore y = -x + e^a - 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = -x + e^a - 1$$

(2)

$b > a$ より、 $a \rightarrow \infty$ のとき、 $b \rightarrow \infty$ である。また、 Q は $f(x)$ と l の交点であるから、

$$e^b - e^a = -b + e^a - 1$$

$$\therefore e^{a-b} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{e^b} + \frac{1}{e^b} \right)$$

が成り立つ。したがって、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} e^{a-b} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{e^b} + \frac{1}{e^b} \right) = \frac{1}{2}$$

となるので、 $\lim_{a \rightarrow \infty} (b-a) = -\lim_{a \rightarrow \infty} \log e^{a-b} = \log 2$ が得られる。よって、題意は示された。

(3)

$$\begin{aligned} S &= \int_0^b (-x + e^a - 1) dx - \int_0^a (-e^x + e^a) dx - \int_a^b (e^x - e^a) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + (e^a - 1)x \right]_0^b + \left[e^x - e^a x \right]_0^a - \left[e^x - e^a x \right]_a^b \\ &= 2(b-a)e^a - e^b + 2e^a - \frac{b^2 + 2b + 2}{2} \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{S}{e^a} = 2(b-a) - e^{b-a} + 2 - \frac{1}{2}e^{b-a} \cdot \frac{b^2 + 2b + 2}{e^b}$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 4 \cdot \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} \cdot \frac{\frac{x}{2}}{e^{\frac{x}{2}}} \\ &= 4 \cdot 0 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

である。したがって、 $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^2 + 2b + 2}{e^b} = 0$ である。よって、

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{e^a} = 2 \log 2$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S}{e^a} = 2 \log 2$$