

〔1〕

(1)

$$\overrightarrow{AB} = (2, -1, 1), \overrightarrow{AC} = (1, -2, 5)$$

であるから,

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2+2+5}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2} \sqrt{1^2+(-2)^2+5^2}} = \frac{9}{6\sqrt{5}} = \frac{3}{10}\sqrt{5}$$

となる。

(答)  $\frac{3\sqrt{5}}{10}$

(2)

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$$

であるから,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{(6\sqrt{5})^2 - 9^2} = \frac{3}{2} \sqrt{11}$$

となる。

(答)  $\frac{3\sqrt{11}}{2}$

(3)

$\triangle ABC$  を含む平面に垂直なベクトルを

$$\vec{u} = (x, y, 1)$$

とおくと,  $\vec{u}$  は  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  と垂直であるので

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $(x, y) = (1, 3)$

(4)

点  $O$  から  $\triangle ABC$  に下ろした垂線の足を点  $H$  とすると,  $\overrightarrow{OH}$  は  $\triangle ABC$  を含む平面に垂直でありかつ, 点  $H$  は  $\triangle ABC$  を含む平面上にある点であるから, 実数  $k, s, t$  を用いて

$$\overrightarrow{OH} = k(1, 3, 1), \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表すことができる。したがって  $k(1, 3, 1) = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$  であるから,

$$\begin{cases} k = 1 + 2s + t \\ 3k = 3 - s - 2t \\ k = -2 + s + 5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - 2s - t = 1 \\ 3k + s + 2t = 3 \\ k - s - 5t = -2 \end{cases}$$

とできる。これを解くと,  $k = \frac{8}{11}$  が得られるため, 求める体積は

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{OH}| = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{2} \cdot \frac{8}{11} \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = 4$$

となる。

(答) 4

〔2〕

(1)

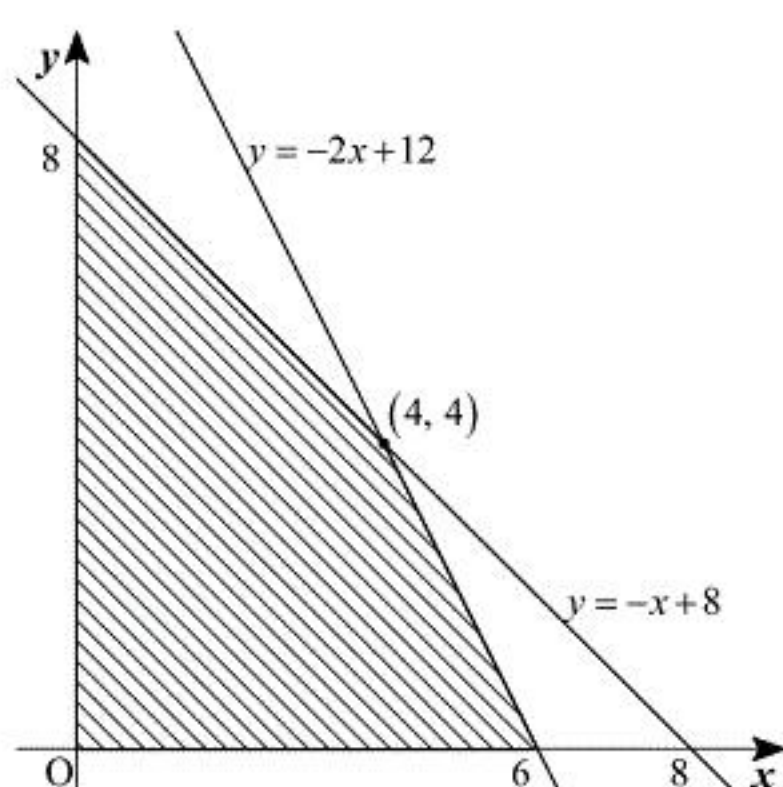
2直線の式から  $y$  を消去して

$$-x+8=-2x+12 \Leftrightarrow x=4$$

であり、これを直線の式に代入すると

$$y=-x+8=-4+8=4$$

となるため、求める座標は  $(4, 4)$  である。したがって求める領域  $D$  は下図の斜線部のように



(答) 交点： $(4, 4)$   
図：前図

(2)

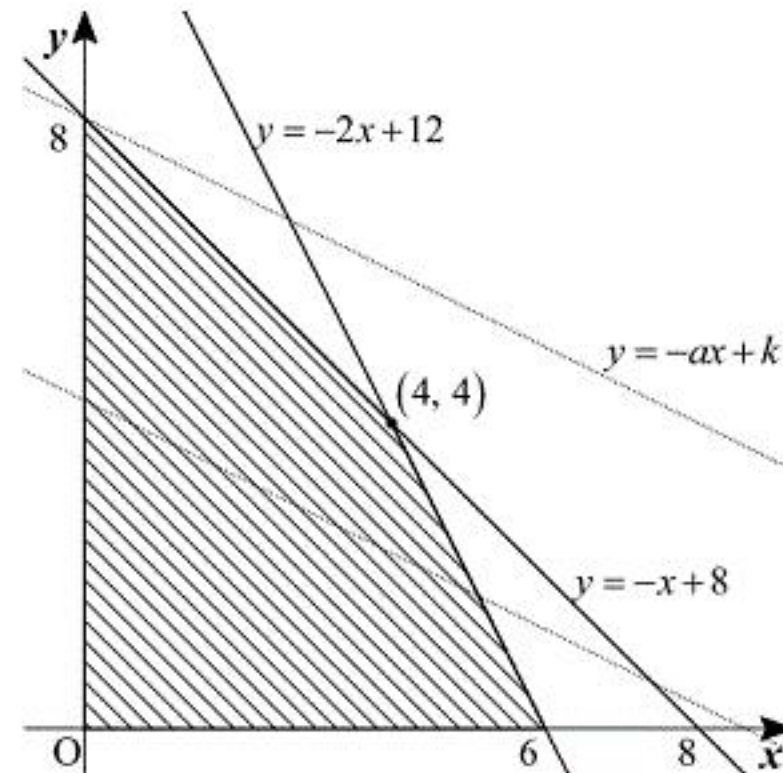
実数  $k$  を用いて  $ax+y=k$  とおくと、 $y=-ax+k$  とできる。 $(x, y)$  が領域  $D$  内を動くとき、直線  $y=-ax+k$  は座標平面上を領域  $D$  と共有点をもちながら動く。 $k$  は直線  $y=-ax+k$  の  $y$  切片であるから、

『 $ax+y$  が最大となる』

$\Leftrightarrow$  『 $k$  が最大となる』

$\Leftrightarrow$  『直線  $y=-ax+k$  の  $y$  切片が最大となる』

とできる。



$0 < a < 1 \Leftrightarrow 0 > -a > -1$  であるから、 $y=-ax+k$  の傾きは  $y=-x+8$  より緩やかであるため、上図より  $(0, 8)$  を通るときに  $y=-ax+k$  の切片が最大、すなわち  $ax+y$  が最大となる。このとき  $y$  切片は  $8$  であるから、

$$M=8$$

となる。

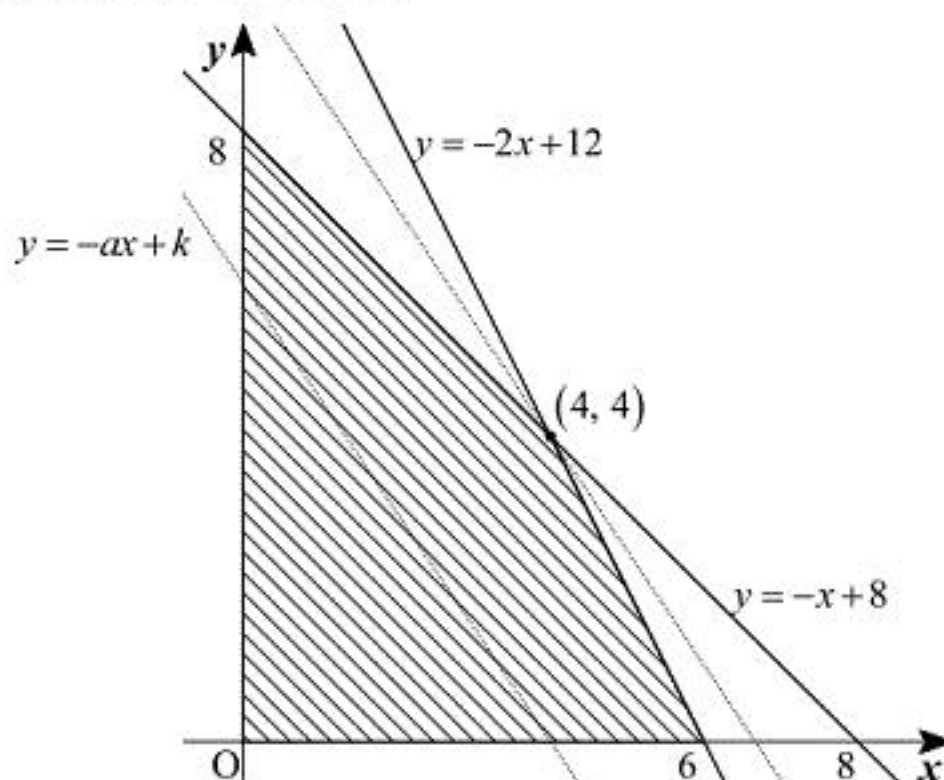
(答)  $M=8$

(3)

$a$  の値によって場合分けを行う。

[1]  $1 \leq a \leq 2$  のとき、

$1 \leq a \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -a \leq -1$  であるから、 $y=-ax+k$  の傾きは、 $y=-x+8$  より急であり、 $y=-2x+12$  より緩やかである。



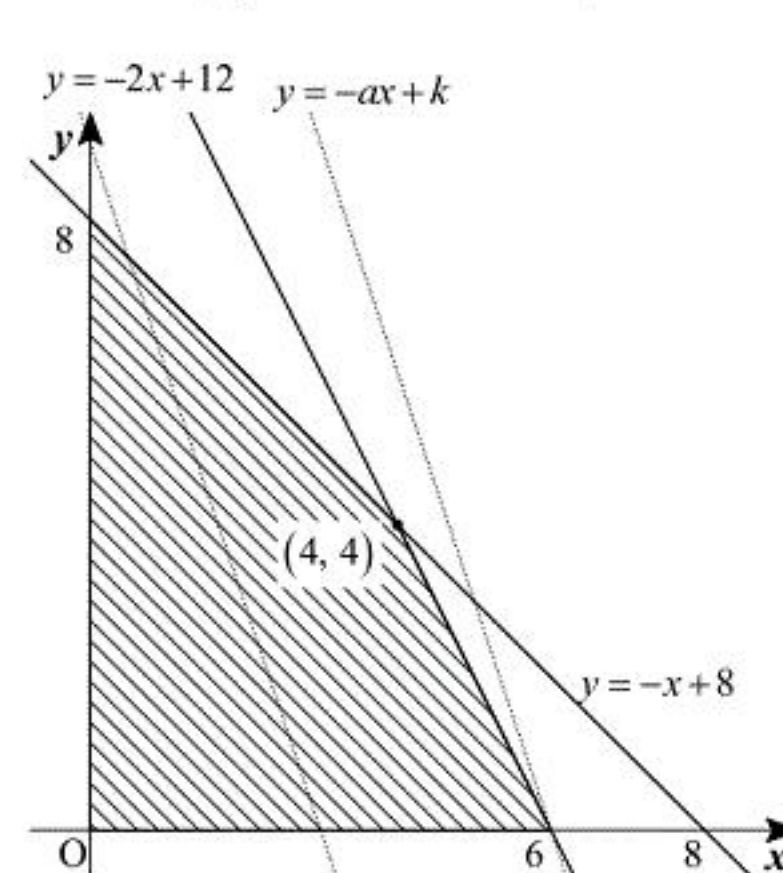
したがって上図より  $(4, 4)$  を通るときに  $ax+y$  が最大となる。このとき、

$$M=ax+y=4a+4$$

となる。

[2]  $2 < a$  のとき、

$2 < a \Leftrightarrow -a < -2$  であるから、 $y=-ax+k$  の傾きは  $y=-2x+12$  より急になる。



したがって上図より  $(6, 0)$  を通るときに  $ax+y$  が最大となる。このとき、

$$M=ax+y=6a$$

となる。

以上[1],[2]より、 $1 \leq a \leq 2$  のとき  $M=4a+4$ 、 $2 < a$  のとき  $M=6a$  となる。

(答)  $1 \leq a \leq 2$  のとき  $M=4a+4$ 、 $2 < a$  のとき  $M=6a$



【3】

(1)

箱から取り出した2枚のカードの組み合わせの総数は、 $C_2 = 36$ (通り)であり、これらはすべて同様に確からしく起こる。箱から取り出した2枚に書かれた番号が続きになっているのは取り出した2枚の組み合わせが

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 9)$$

の8通りとなるときであるから、求める確率は

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

となる。

(答)  $\frac{2}{9}$

(2)

箱から取り出した3枚のカードの組み合わせの総数は、 $C_3 = 84$ (通り)であり、これらはすべて同様に確からしく起こる。箱から取り出した3枚のうち2枚に書かれた番号が続きとなるのは、

$(2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)$ の各場合で、それらの数字と続きにならない他5枚から1枚ずつ選ぶ場合

$(1, 2), (8, 9)$ の各場合で、それらの数字と続きにならない他6枚から1枚ずつ選ぶ場合

である。また、箱から取り出した3枚に書かれた番号が続きとなるのは、

$$(1, 2, 3), (2, 3, 4), (3, 4, 5), (4, 5, 6), (5, 6, 7), (6, 7, 8), (7, 8, 9)$$

の7通りである。したがって、求める確率は

$$\frac{6 \cdot 5 + 2 \cdot 6 + 7}{84} = \frac{7}{12}$$

となる。

(答)  $\frac{7}{12}$

(3)

箱から取り出した4枚のカードの組み合わせの総数は、 $C_4 = 126$ (通り)であり、これらはすべて同様に確からしく起こる。取り出したカードを小さい順に  $A, B, C, D$  として、

$B - A = a, C - B = b, D - C = c$  とする。取り出したカードの番号が続いていない場合、 $2 \leq a, 2 \leq b, 2 \leq c$  より  $a + b + c \geq 6$  であり、 $D \leq 9, A \geq 1$  であるから、 $D - A \leq 8 \Leftrightarrow a + b + c \leq 8$  となる。以下、 $a + b + c$  の値で場合分けする。

[1]  $a + b + c = 6$  のとき

$$(a, b, c) = (2, 2, 2)$$

であり、 $D - A = 6$  かつ  $D \leq 9$  であるので、 $A = 1, 2, 3$  である。よって、カードの番号が続いていない組み合わせは

$$1 \cdot 3 = 3 \text{ (通り)}$$

である。

[2]  $a + b + c = 7$  のとき

$$(a, b, c) = (2, 2, 3), (2, 3, 2), (3, 2, 2)$$

であり、 $D - A = 7$  かつ  $D \leq 9$  であるので、 $A = 1, 2$  である。よって、カードの番号が続いていない組み合わせは

$$3 \cdot 2 = 6 \text{ (通り)}$$

である。

[3]  $a + b + c = 8$  のとき

$$(a, b, c) = (2, 2, 4), (2, 4, 2), (4, 2, 2), (3, 3, 2), (3, 2, 3), (2, 3, 3)$$

であり、 $D - A = 8$  かつ  $D \leq 9$  であるので、 $A = 1$  である。よって、カードの番号が続いていない組み合わせは

$$6 \cdot 1 = 6 \text{ (通り)}$$

である。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は余事象を考えて、

$$1 - \frac{3 + 6 + 6}{126} = \frac{37}{42}$$

である。

(答)  $\frac{37}{42}$

〔4〕

(1)

$$f'(x) = 2x(x-3a) + x^2 = 3x^2 - 6ax$$

であるから、接線  $l$  の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(-a)\{x - (-a)\} + f(-a) \\ \Leftrightarrow y &= (3a^2 + 6a^2)(x+a) - 4a^3 \\ \Leftrightarrow y &= 9a^2x + 5a^3 \end{aligned}$$

となる。ここで、接線  $l$  と  $y = f(x)$  を連立し、 $y$  を消去すると、

$$\begin{aligned} 9a^2x + 5a^3 &= x^3 - 3ax^2 \\ \Leftrightarrow x^3 - 3ax^2 - 9a^2x - 5a^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+a)^2(x-5a) &= 0 \\ \therefore x &= -a, 5a \end{aligned}$$

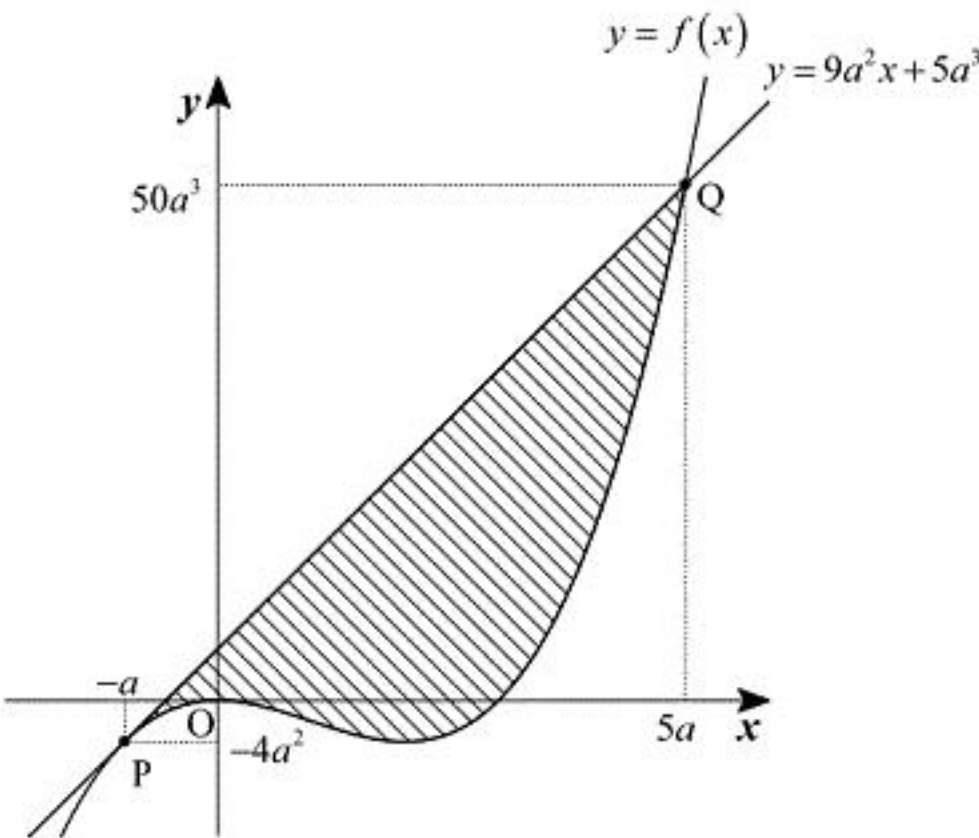
である。 $x = -a$  は点  $P$  の  $x$  座標であるから、点  $Q$  の  $x$  座標は  $x = 5a$  であり、 $y = f(5a) = 50a^3$

であるから、求める座標は  $(5a, 50a^3)$  である。

(答)  $(5a, 50a^3)$

(2)

曲線  $C$  と接線  $l$  のグラフは下図のようになる。



求める面積は上図の斜線部分であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{5a} \{9a^2x + 5a^3 - f(x)\} dx \\ &= \int_{-a}^{5a} \{-(x+a)^2(x-5a)\} dx \\ &= \int_{-a}^{5a} \{-(x+a)^3 + 6a(x+a)^2\} dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}(x+a)^4 + 2a(x+a)^3 \right]_{-a}^{5a} \\ &= \left\{ -\frac{1}{4} \cdot (6a)^4 + 2a \cdot (6a)^3 \right\} - 0 \\ &= -324a^4 + 432a^4 \\ &= 108a^4 \end{aligned}$$

となる。

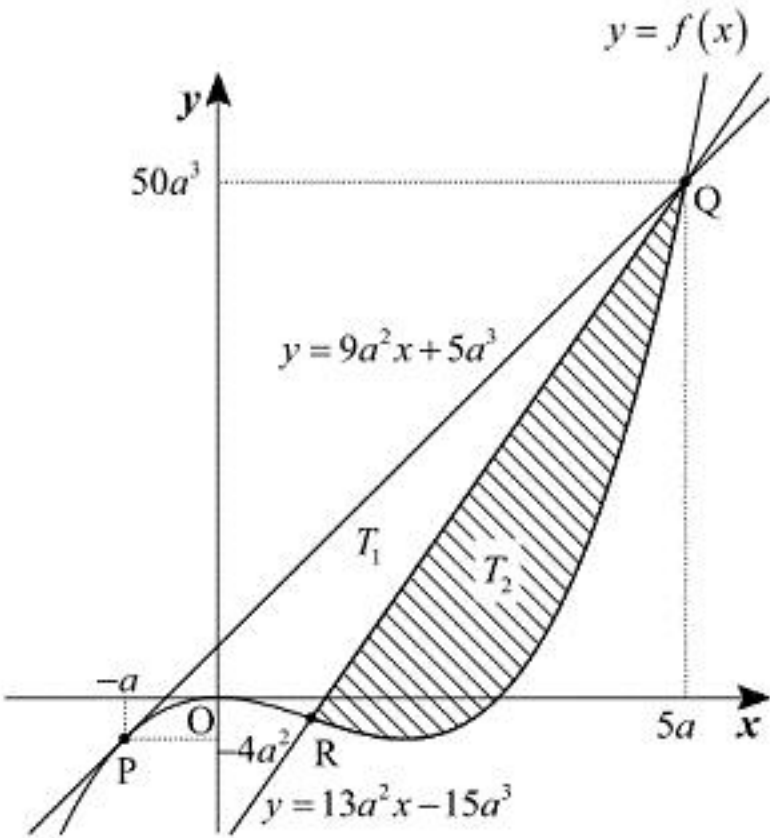
(答)  $S = 108a^4$

(3)

直線  $RQ$  の式は、点  $R$  が  $(a, f(a)) = (a, -2a^3)$  であるから、

$$y = \frac{50a^3 - (-2a^3)}{5a - a}(x - 5a) + 50a^3 \Leftrightarrow y = 13a^2x - 15a^3$$

となる。線分  $PQ$  と曲線  $C$  で囲まれる図形は、直線  $RQ$  によって下図のように2つに分けられる。



したがって、上図の斜線部分の面積が  $T_2$  であり、 $T_1 + T_2 = S \Leftrightarrow T_1 = S - T_2$  である。よって、

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_a^{5a} \{13a^2x - 15a^3 - f(x)\} dx \\ &= \int_a^{5a} (13a^2x - 15a^3 - x^3 + 3ax^2) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + ax^3 + \frac{13}{2}a^2x^2 - 15a^3x \right]_a^{5a} \\ &= 64a^4 \end{aligned}$$

であるから、

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{S - T_2}{T_2} = \frac{108a^4 - 64a^4}{64a^4} = \frac{11}{16}$$

となる。

(答)  $\frac{11}{16}$