

〔1〕

(1)

正の実数 r を用いて $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおくと整数 k を用いて、

$$\begin{aligned} z^n &= 1 \\ \Leftrightarrow r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) &= \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $r > 0$ を考えて

$$\begin{aligned} r^n &= 1 \\ \Leftrightarrow (r-1)(1+r+\cdots+r^{n-1}) &= 0 \\ \Leftrightarrow r &= 1 \\ n\theta &= 2k\pi \\ \Leftrightarrow \theta &= \frac{2k}{n}\pi \end{aligned}$$

とできる。ここで $0 \leq \theta < 2\pi$ より、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2k}{n}\pi < 2\pi \\ \Leftrightarrow 0 &\leq k < n \end{aligned}$$

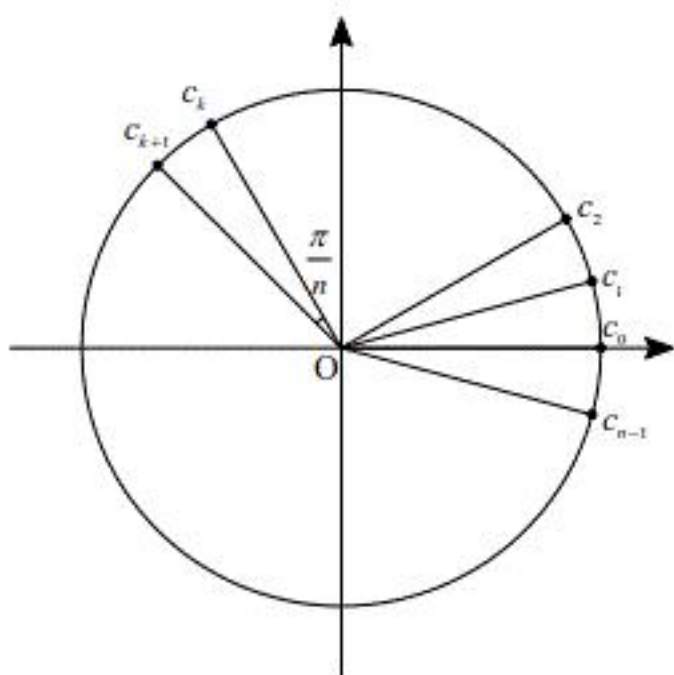
であるから、求める解は

$$z = \cos \frac{2k}{n}\pi + i \sin \frac{2k}{n}\pi \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad z = \cos \frac{2k}{n}\pi + i \sin \frac{2k}{n}\pi \quad (k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

(2)



$c_0, c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}$ の位置は上図のようになる。したがって $k = 0, 1, \cdots, n-2$ において、余弦定理を用いて

$$\begin{aligned} |c_{k+1} - c_k|^2 &= |c_{k+1}|^2 + |c_k|^2 - 2|c_k||c_{k+1}|\cos \frac{2\pi}{n} \\ \Leftrightarrow |c_{k+1} - c_k|^2 &= 2 - 2\cos \frac{2\pi}{n} \\ \therefore |c_{k+1} - c_k| &= \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)} \quad (\because |c_{k+1} - c_k| > 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $c_n = c_0$ であることから、 $k = n-1$ のときも同様に

$$\begin{aligned} |c_0 - c_{n-1}|^2 &= |c_0|^2 + |c_{n-1}|^2 - 2|c_{n-1}||c_0|\cos \frac{2\pi}{n} \\ \Leftrightarrow |c_0 - c_{n-1}|^2 &= 2 - 2\cos \frac{2\pi}{n} \\ \Leftrightarrow |c_n - c_{n-1}|^2 &= 2 - 2\cos \frac{2\pi}{n} \\ \therefore |c_n - c_{n-1}| &= \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)} \quad (\because |c_n - c_{n-1}| > 0) \end{aligned}$$

となり、成立する。

(証明終)

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} |c_{k+1} - c_k| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= n\sqrt{2\left(1 - \cos \frac{2\pi}{n}\right)} \\ &= 2\pi \cdot \frac{n}{2\pi} \sqrt{\frac{2\left(1 - \cos^2 \frac{2\pi}{n}\right)}{1 + \cos \frac{2\pi}{n}}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{n}}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{n} = 0$ を考えれば、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \sqrt{\frac{2}{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{2\pi}{n}}{\left(\frac{2\pi}{n}\right)^2}} \\ &= 2\pi \sqrt{\frac{2}{1+1}} \cdot 1 \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

とわかる。

(答) 2π

〔2〕

x を固定し、 t を変数とみて考える。定数 x を x_0 とおき、

$$f(t) = -2t^3 + 3x_0 t^2 - x_0^3$$

とおくと、

$$f'(t) = -6t^2 + 6x_0 t = -6t(t - x_0)$$

となる。したがって $0 \leq x_0 \leq 1$ に注意すると、増減表は以下のようになる。

t	0	...	x_0	...	1
$f'(t)$	$\nearrow$	+	0	-	$\searrow$
$f(t)$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$f(1)$

ここで、

$$f(0) - f(1) = -x_0^3 - (-2 + 3x_0 - x_0^3) = -(3x_0 - 2)$$

となるから、

$$0 \leq x_0 \leq \frac{2}{3} \text{ のとき, } f(0) - f(1) \geq 0 \Leftrightarrow f(0) \geq f(1)$$

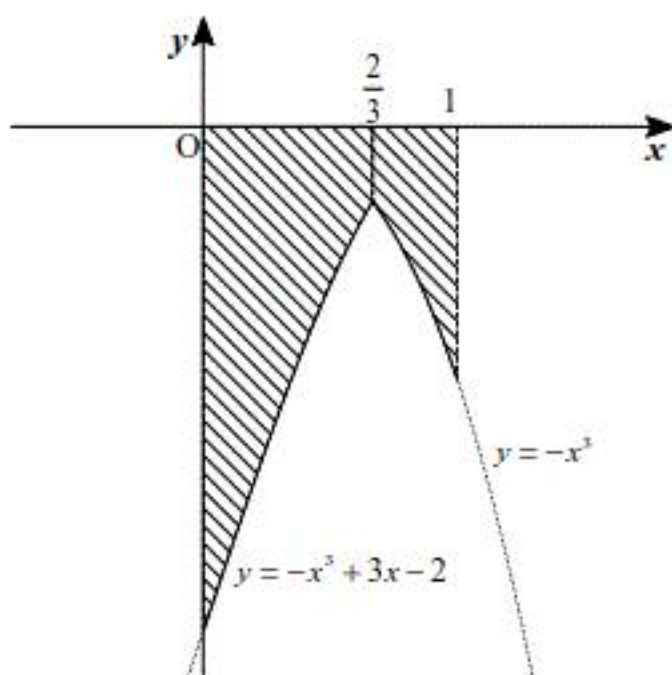
$$\frac{2}{3} \leq x_0 \leq 1 \text{ のとき, } f(0) - f(1) \leq 0 \Leftrightarrow f(0) \leq f(1)$$

である。したがって、曲線 $C: y = f(t)$ について、 $t = x_0$ で $f(t) = 0$ となることを考慮して、

$$0 \leq x_0 \leq \frac{2}{3} \text{ のとき, } f(1) \leq y \leq f(x_0) \Leftrightarrow -2 + 3x_0 - x_0^3 \leq y \leq 0$$

$$\frac{2}{3} \leq x_0 \leq 1 \text{ のとき, } f(0) \leq y \leq f(x_0) \Leftrightarrow -x_0^3 \leq y \leq 0$$

となる。これを図示すると斜線部となる。ただし、境界は含む。



よって求める面積は、

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{2}{3}} \{0 - (-x^3 + 3x - 2)\} dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \{0 - (-x^3)\} dx \\
 &= \int_0^{\frac{2}{3}} x^3 + \int_0^{\frac{2}{3}} (-3x + 2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^{\frac{2}{3}} + \left[-\frac{3}{2} x^2 + 2x \right]_0^{\frac{2}{3}} \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{4}{3} \\
 &= \frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

とわかる。

〔3〕

(1)

$f(x)$ は区間 $[0, 1]$ で単調増加であるから、自然数 k ($k=1, 2, \dots, n$) について $\frac{k-1}{n} \leq x \leq \frac{k}{n}$ と

なる実数 x に関して、

$$f\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

が成り立つ。したがって自然数 k ($k=1, 2, \dots, n$) について

$$\begin{aligned} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k-1}{n}\right) dx &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \\ \Leftrightarrow \left[f\left(\frac{k-1}{n}\right) x \right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \left[f\left(\frac{k}{n}\right) x \right]_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) &\leq \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

とできる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) &\leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \\ \therefore \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k-1}{n}\right) &\leq \int_0^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(2)

$x \geq 0$ とする。 $g(x) = x^a$ とおくと、

$$g'(x) = ax^{a-1} \geq 0 \quad (\because a > 0, x \geq 0)$$

であるから、 $g(x)$ は $x \geq 0$ において連続でありかつ単調増加となる。したがって、(1)より

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k-1}{n}\right) \leq \int_0^1 g(x) dx \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\int_0^1 g(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。ここで、①の n を $n+1$ に置き換えて

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} g\left(\frac{k-1}{n+1}\right) &\leq \int_0^1 g(x) dx \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k-1}{n+1}\right)^a &\leq \left[\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} \right]_0^1 \quad (\because a > 0) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^{a+1}} \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)^a &\leq \frac{1}{a+1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^{a+1}} \sum_{k=0}^n k^a &\leq \frac{1}{a+1} \\ \therefore (a+1) \sum_{k=1}^n k^a &\leq (n+1)^{a+1} \quad (\because a > 0, n \text{ は自然数}) \end{aligned}$$

となる。また、②より

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) dx &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \\ \Leftrightarrow \left[\frac{1}{a+1} \cdot x^{a+1} \right]_0^1 &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^a \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a+1} &\leq \frac{1}{n^{a+1}} \sum_{k=1}^n k^a \\ \therefore n^{a+1} &\leq (a+1) \sum_{k=1}^n k^a \quad (\because a > 0, n \text{ は自然数}) \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$n^{a+1} \leq (a+1) \sum_{k=1}^n k^a \leq (n+1)^{a+1}$$

が成り立つ。

(証明終)

〔4〕

(1)

△OABの1辺の長さを1とする。 $n=3$ のとき、1辺が1の正三角形が1個、1辺が $\frac{2}{3}$ の正三角形

が3個、1辺が $\frac{1}{3}$ の正三角形が9個入るから、

$$t_3=1+3+9=13$$

である。

(答) 13

(2)

1辺が $\frac{1}{n}$ の正三角形が n 個、1辺が $\frac{2}{n}$ の正三角形が $n-1$ 個、…1辺が $\frac{n}{n}$ の正三角形が1個とい

うように1辺が $\frac{k}{n}$ の正三角形が $n+1-k$ 個あるから、求める答えは

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n(n+1-k) \\ &=n+(n-1)+\cdots+1 \\ &=\sum_{k=1}^n k \\ &=\frac{1}{2}n(n+1)(\text{個}) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{2}n(n+1)$ (個)

(3)

[1] n が偶数のとき

1辺が $\frac{1}{n}$ の正三角形が $n-1$ 個、1辺が $\frac{2}{n}$ の正三角形が $n-3$ 個、…1辺が $\frac{1}{2}$ の正三角形が1

個というように1辺が $\frac{k}{n}$ の正三角形が $n+1-2k$ 個あるから、求める答えは

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(n+1-2k)=\frac{n}{2}(n+1)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)=\frac{n^2}{4}(\text{個})$$

となる。

[2] n が奇数のとき

1辺が $\frac{1}{n}$ の正三角形が $n-1$ 個、1辺が $\frac{2}{n}$ の正三角形が $n-3$ 個、…1辺が $\frac{n-1}{2n}$ の正三角形

が2個というように1辺が $\frac{k}{n}$ の正三角形が $n+1-2k$ 個あるから、求める答えは

$$\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n+1-2k)=\frac{n-1}{2}\cdot(n+1)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)=\frac{n^2-1}{4}(\text{個})$$

となる。

以上[1],[2]より、偶数のとき $\frac{n^2}{4}$ 個、奇数のとき $\frac{n^2-1}{4}$ 個である。

(答) 偶数のとき $\frac{n^2}{4}$ 個、奇数のとき $\frac{n^2-1}{4}$ 個

(4)

$n=k+1$ のとき、

$$OA'=\frac{k}{k+1},OB'=\frac{k}{k+1}$$

となるような点A'、B'、線分A'B'をOA、OB上にとると、△OA'B'は1辺が $\frac{k}{k+1}$ の正三角

形であるから、△OA'B'の内部にある正三角形の数は t_k と等しい。したがって、 t_{k+1} は辺AB

上に1辺がある正三角形、または1点のみを共有する正三角形の数を t_k に加えたものである。

よって、

$$u_{n+1}-u_n=t_{2n+1}-t_{2n-1}=(t_{2n+1}-t_{2n})+(t_{2n}-t_{2n-1})$$

であるから、(2),(3)より

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \left\{ \frac{(2n+1)^2-1}{4} + \frac{1}{2} \cdot (2n+1)(2n+2) \right\} + \left\{ \frac{(2n)^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot 2n(2n+1) \right\} \\ &= 6n^2+5n+1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $6n^2+5n+1$

(5)

n が奇数のとき、自然数 l を用いて $n=2l-1$ と表せる。ここで、 $t_n=t_{2l-1}$ であり、 $t_{2l-1}=u_l$ であ

る。よって、 $l \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} u_l &= (u_l-u_{l-1})+(u_{l-1}-u_{l-2})+\cdots+(u_2-u_1)+u_1 \\ &= \sum_{k=1}^{l-1}(u_{k+1}-u_k)+u_1 \end{aligned}$$

と表すことができ、 $u_1=t_1=1$ および(4)の結果から、

$$\begin{aligned} u_l &= \sum_{k=1}^{l-1}(6k^2+5k+1)+1 \\ &= 6\cdot\frac{1}{6}l(l-1)(2l-1)+5\cdot\frac{1}{2}l(l-1)+l-1+1 \\ &= \frac{l}{2}(4l^2-l-1) \end{aligned}$$

とできる。ここで、 $u_l=t_{2l-1}$ であるから、

$$2l-1=n \Leftrightarrow l=\frac{n+1}{2}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}\cdot\left\{ 4\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\frac{n+1}{2}-1 \right\} \\ &= \frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1) \end{aligned}$$

とできる。また、 $l=1$ のときは $n=1$ であり、 $t_1=1$ である。これは $t_n=\frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1)$ を

満たしている。

(答) $\frac{1}{8}(n+1)(2n^2+3n-1)$