

〔1〕

(1)

方程式を解くと

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 3\end{aligned}$$

であるから、 $\alpha > \beta$  より

$$\alpha = 3, \beta = -1$$

である。

(答)  $\alpha = 3, \beta = -1$

(2)

$a_1 = 1 > 0$  であり、漸化式より帰納的に  $a_n > 0$  である。よって、 $a_n + 1 > 0$  であるから(1)より

$$b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$$

となる。よって

$$b_1 = \frac{a_1 - 3}{a_1 + 1} = -1$$

である。ここで

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} \\ &= \frac{2 + \frac{3}{a_n} - 3}{2 + \frac{3}{a_n} + 1} \\ &= \frac{2a_n + 3 - 3a_n}{2a_n + 3 + a_n} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \\ &= -\frac{1}{3} b_n\end{aligned}$$

となるから、数列  $\{b_n\}$  は公比  $-\frac{1}{3}$  の等比数列である。

(証明終)

(3)

(2)より、 $b_n$  は初項が  $-1$ 、公比が  $-\frac{1}{3}$  の等比数列であるから

$$b_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

である。また

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \\ \Leftrightarrow (a_n + 1)b_n &= a_n - 3 \\ \Leftrightarrow (b_n - 1)a_n &= -b_n - 3\end{aligned}$$

であり、 $b_n \neq 1$  より

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{-b_n - 3}{b_n - 1} \\ &= \frac{3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{3^n - (-1)^{n-1}}{3^{n-1} + (-1)^{n-1}}\end{aligned}$$

となる。

(答)  $a_n = \frac{3^n - (-1)^{n-1}}{3^{n-1} + (-1)^{n-1}}, b_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

## 〔2〕

(1)

$$9x+5y=1 \quad \dots \textcircled{1}$$

について、 $(x, y)=(-1, 2)$  のとき①式をみたすから

$$9 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、①式から②式を引いて

$$9(x+1)+5(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 9(x+1)=5(2-y)$$

となる。ここで、左辺は9の倍数で、右辺は5の倍数であり、9と5は互いに素であるから整数 $k$ を用いて

$$x+1=5k$$

$$2-y=9k$$

と表される。よって

$$x=5k-1$$

$$y=-9k+2$$

である。

(答)  $x=5k-1, y=-9k+2$  ( $k$  は整数)

(2)

自然数 $a, b$ が互いに素であるとき、 $3a+b$ と $5a+2b$ も互いに素であることを背理法を用いて示す。 $3a+b$ と $5a+2b$ が2以上の素数 $p$ を公約数としてもつとすると、整数 $m, n$ を用いて

$$3a+b=mp \quad \dots \textcircled{3}$$

$$5a+2b=np \quad \dots \textcircled{4}$$

とおける。③、④式より

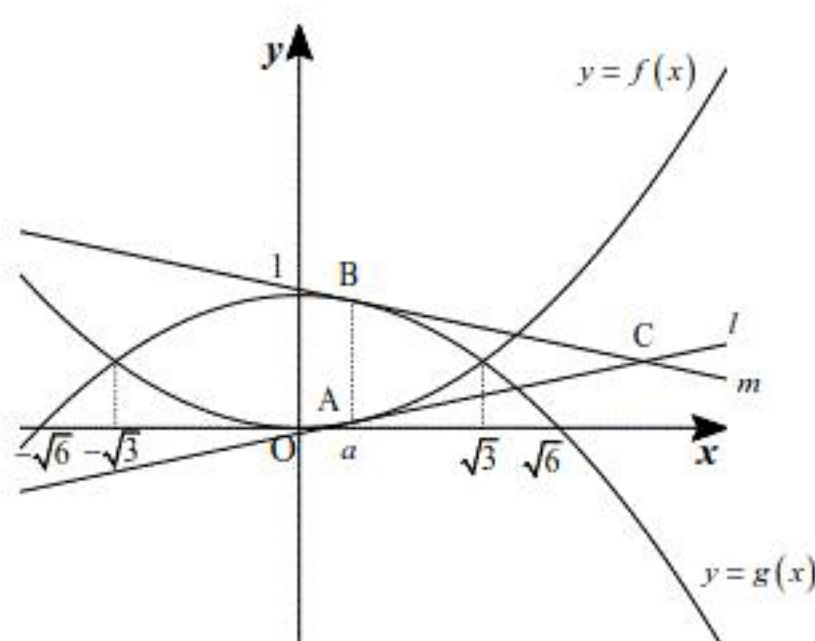
$$a=(2m-n)p$$

$$b=(3n-5m)p$$

となる。よって、 $a, b$ は自然数であるから $2m-n \neq 0$ かつ $3n-5m \neq 0$ であり、 $a, b$ は $p$ を公約数としてもつが、これは $a, b$ が互いに素であることに矛盾する。以上より、 $3a+b$ と $5a+2b$ は互いに素であることが示された。

(証明終)

[3]



(1)

$f'(x)=\frac{x}{3}$  であるから、 $l$  の方程式は

$$y=\frac{a}{3}(x-a)+\frac{a^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{6}$$

である。また、 $g'(x)=-\frac{x}{3}$  より、 $m$  の方程式は

$$y=-\frac{a}{3}(x-a)-\frac{a^2}{6}+1$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{a}{3}x+\frac{a^2}{6}+1$$

である。よって、 $l, m$  の交点  $C$  の  $x$  座標は

$$\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{6}=-\frac{a}{3}x+\frac{a^2}{6}+1$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{a^2+3}{2a}$$

となるから、 $C$  の  $y$  座標は

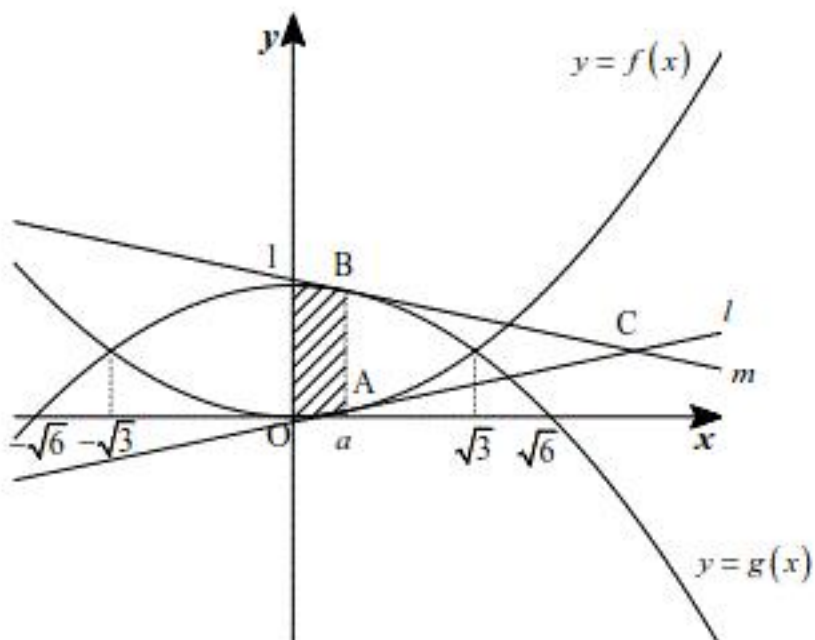
$$y=\frac{a}{3}\cdot\frac{a^2+3}{2a}-\frac{a^2}{6}=\frac{1}{2}$$

である。

(答)  $C\left(\frac{a^2+3}{2a}, \frac{1}{2}\right)$

(2)

求めるのは下図の斜線部の面積  $S$  と  $\triangle ABC$  の面積  $T$  である。



よって

$$S=\int_0^a\{g(x)-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^a\frac{3-x^2}{3}dx$$

$$=\left[x-\frac{x^3}{9}\right]_0^a$$

$$=a-\frac{a^3}{9}$$

となり

$$(\text{Cの}x\text{座標})-(\text{Aの}x\text{座標})=\frac{a^2+3}{2a}-a=\frac{3-a^2}{2a}>0$$

であるから

$$T=\frac{1}{2}AB\cdot\frac{3-a^2}{2a}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3-a^2}{3}\cdot\frac{3-a^2}{2a}$$

$$=\frac{(3-a^2)^2}{12a}$$

となる。

(答)  $S=a-\frac{a^3}{9}, T=\frac{(3-a^2)^2}{12a}$

(3)

$S:T=8:3$  のとき、 $8T=3S$  であるから、(2)より

$$8\cdot\frac{(3-a^2)^2}{12a}=3\left(a-\frac{a^3}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(9-6a^2+a^4)=9a^2-a^4$$

$$\Leftrightarrow 3a^4-21a^2+18=0$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2-1)(a^2-6)=0$$

となり、 $0<a<\sqrt{3}$  より

$$a=1$$

となる。

(答)  $a=1$

【4】

(1)

線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

であり、線分 AC の中点 N の座標は

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{1+x}{2}, 1, 2\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1+x}{2}, 1, 2\right)$$

(2)

$\overrightarrow{OA} = (1, 2, 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (2, 1, 1)$  と表されるから

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4$$

であり、 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$ ,  $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{6}$  であるから

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{2\sqrt{30}}{15} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \cos \angle AOB = \frac{2\sqrt{30}}{15}$$

(3)

(2)と同様にして、 $\overrightarrow{OC} = (x, 0, 4)$  と表されるから

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot x + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 2x + 4$$

であり、 $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{x^2 + 16}$  であるから

$$\begin{aligned} \cos \angle BOC &= \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}|} \\ &= \frac{2x+4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{x^2+16}} \\ &= \frac{2x+4}{\sqrt{6x^2+96}} \end{aligned}$$

となる。よって、(2)より

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \cos \angle BOC \\ \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{30}}{15} &= \frac{2x+4}{\sqrt{6x^2+96}} \\ \Leftrightarrow 6\sqrt{5x^2+80} &= 15x+30 \\ \Leftrightarrow 2\sqrt{5x^2+80} &= 5x+10 \\ \Leftrightarrow 20x^2+320 &= 25x^2+100x+100 \quad (\because 5x+10 > 0) \\ \Leftrightarrow 5x^2+100x-220 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2+20x-44 &= 0 \\ \Leftrightarrow x=2, -22 \end{aligned}$$

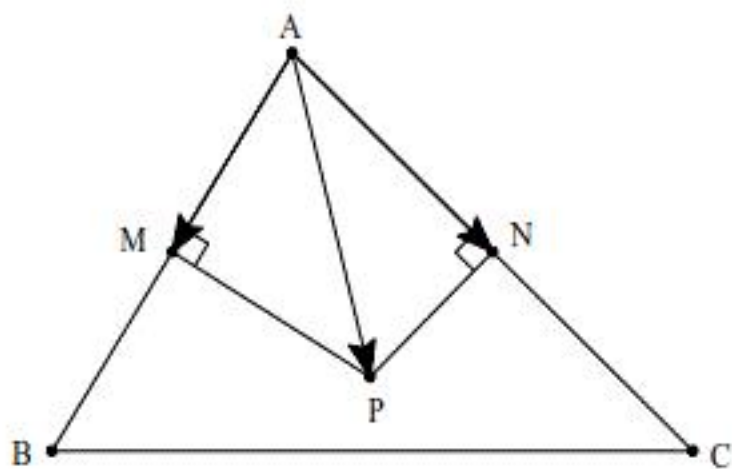
となり、 $x > 0$  であるから  $x=2$  である。ここで、 $\triangle ABC$  の外心 P は平面  $\alpha$  上にあるから実数  $s, t$  を用いて

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表される。 $x=2$  より  $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 4)$  であるから

$$\overrightarrow{AP} = (s+t, -s-2t, s+4t)$$

である。ここで、点 P は外心であるから  $\triangle ABC$  との位置関係は下図のようになる。



よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= (s+t, -s-2t, s+4t) - \frac{1}{2}(1, -1, 1) \\ &= \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+\frac{1}{2}, s+4t-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= (s+t, -s-2t, s+4t) - \frac{1}{2}(1, -2, 4) \\ &= \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+1, s+4t-2\right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+\frac{1}{2}, s+4t-\frac{1}{2}\right) \cdot (1, -1, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow s+t-\frac{1}{2}+s+2t-\frac{1}{2}+s+4t-\frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3s+7t-\frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+1, s+4t-2\right) \cdot (1, -2, 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow s+t-\frac{1}{2}+(-s-2t+1) \cdot (-2)+(s+4t-2) \cdot 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7s+21t-\frac{21}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow s+3t-\frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上より、これらを連立して解いて

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3s+7t-\frac{3}{2}=0 \\ s+3t-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s=-3 \\ t=\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= (1, 2, 0) + \left(-3 + \frac{3}{2}, -(-3) - 2 \cdot \frac{3}{2}, -3 + 4 \cdot \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right) \end{aligned}$$

となり、点 P の座標は  $\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$  である。

$$(\text{答}) \quad x=2, P\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$$