

〔1〕

(1)

方程式を解くと

$$\begin{aligned}x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+1)(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -1, 3\end{aligned}$$

であるから、 $\alpha > \beta$ より

$$\begin{aligned}\alpha &= 3 \\ \beta &= -1\end{aligned}$$

である。

(答) $\alpha = 3, \beta = -1$

(2)

$a_1 = 1 > 0$ であり、漸化式より帰納的に $a_n > 0$ である。よって、 $a_n + 1 > 0$ であるから(1)より

$$b_n = \frac{a_n - 3}{a_n + 1}$$

となる。よって

$$b_1 = \frac{a_1 - 3}{a_1 + 1} = -1$$

である。ここで

$$\begin{aligned}b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} - 3}{a_{n+1} + 1} \\ &= \frac{2 + \frac{3}{a_n} - 3}{2 + \frac{3}{a_n} + 1} \\ &= \frac{2a_n + 3 - 3a_n}{2a_n + 3 + a_n} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \\ &= -\frac{1}{3} b_n\end{aligned}$$

となるから、数列 $\{b_n\}$ は公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列である。

(証明終)

(3)

(2)より、 b_n は初項が -1 、公比が $-\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$b_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

である。また

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{a_n - 3}{a_n + 1} \\ \Leftrightarrow (a_n + 1)b_n &= a_n - 3 \\ \Leftrightarrow (b_n - 1)a_n &= -b_n - 3\end{aligned}$$

であり、 $b_n \neq 1$ より

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{-b_n - 3}{b_n - 1} \\ &= \frac{3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}} \\ &= \frac{3^n - (-1)^{n-1}}{3^{n-1} + (-1)^{n-1}}\end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad a_n = \frac{3^n - (-1)^{n-1}}{3^{n-1} + (-1)^{n-1}}, \quad b_n = -\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(4)

(3)より、 $3^{n-1} \neq 0$ であるから

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{3^n - (-1)^{n-1}}{3^{n-1} + (-1)^{n-1}} \\ &= \frac{3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

である。よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3-0}{1+0} = 3$$

となる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$

〔2〕

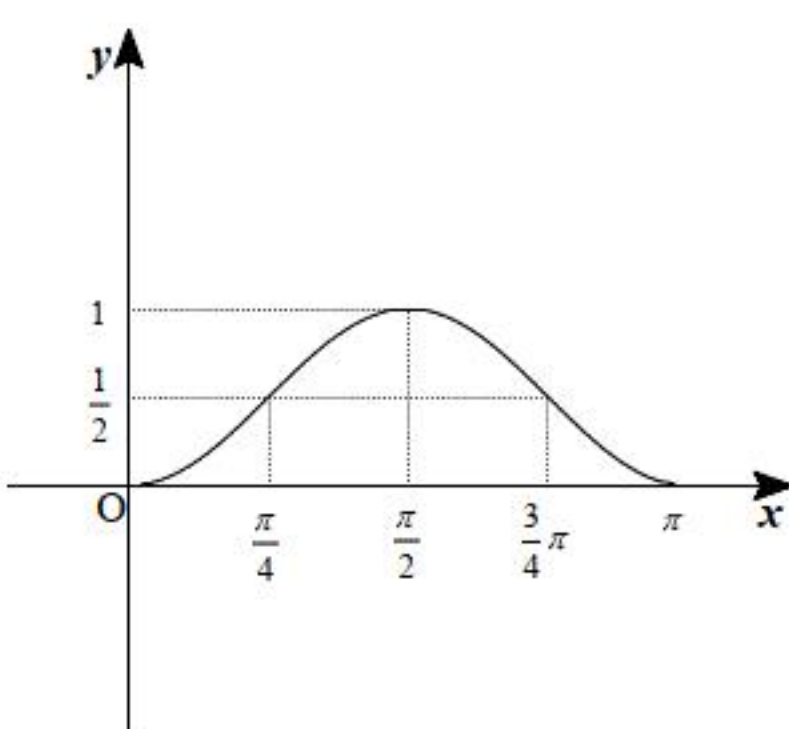
(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \sin x \cos x \\ &= \sin 2x \\ f''(x) &= 2 \cos 2x \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で増減表をかくと以下のようになる。

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$	0	+	1	+	0	-	-1	-	0
$f''(x)$	2	+	0	-	-2	-	0	+	2
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↖	1	↘	$\frac{1}{2}$	↙	0

よって、増減表より、グラフは以下のようになる。

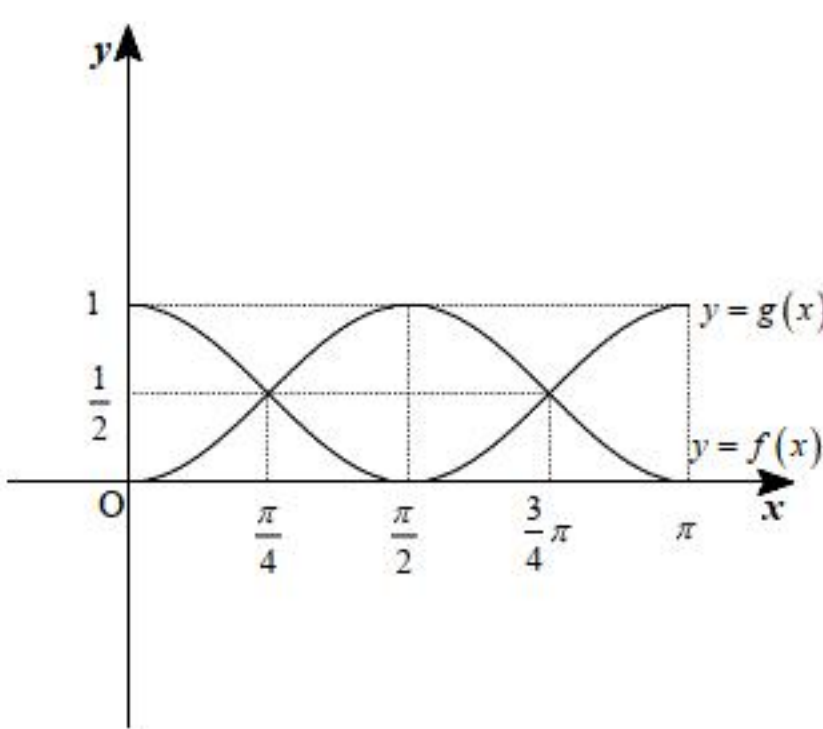


(答) 上記の通り

(2)

(i)

$y = g(x)$ について、 $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ より $g(x) = \sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ であるからグラフは下図のようになる。



よって、上図のグラフの上下関係に注目して、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^a (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\ &= \int_0^a \cos 2x dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} \sin 2a \end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{1}{2} \sin 2a$

(ii)

曲線 $y = f(x)$ の点 A における接線を l とすると、 l の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= (x-a) \sin 2a + \sin^2 a \end{aligned}$$

である。また

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2 \cos x \cdot (-\sin x) \\ &= -\sin 2x \end{aligned}$$

であるから、曲線 $y = g(x)$ の点 B における接線を m とすると、 m の方程式は

$$\begin{aligned} y &= g'(a)(x-a) + g(a) \\ &= -(x-a) \sin 2a + \cos^2 a \end{aligned}$$

である。よって、これら 2 接線の交点 C の x 座標は、2 式を連立して y を消去して

$$\begin{aligned} (x-a) \sin 2a + \sin^2 a &= -(x-a) \sin 2a + \cos^2 a \\ \Leftrightarrow 2(x-a) \sin 2a &= \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a \quad (\because \cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a) \\ \Leftrightarrow x &= a + \frac{1}{2 \tan 2a} \quad \left(\because 0 < 2a < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

である。よって、 C の y 座標は

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{2 \tan 2a} - a \right) \sin 2a + \sin^2 a &= \frac{1}{2} \cos 2a + \sin^2 a \\ &= \frac{\cos^2 a - \sin^2 a}{2} + \sin^2 a \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $C\left(a + \frac{1}{2 \tan 2a}, \frac{1}{2}\right)$

(iii)

線分 AB の長さは $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$ であるから $\triangle ABC$ の面積 T は

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot \cos 2a \cdot \left(a + \frac{1}{2 \tan 2a} - a \right) \\ &= \frac{\cos^2 2a}{4 \sin 2a} \end{aligned}$$

である。よって

$$\begin{aligned} S+T &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2a + \frac{\cos^2 2a}{4 \sin 2a} &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{2 \sin^2 2a + \cos^2 2a}{4 \sin 2a} &= \frac{5}{8} \\ \Leftrightarrow \frac{\sin^2 2a + 1}{\sin 2a} &= \frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sin^2 2a - 5 \sin 2a + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2 \sin 2a - 1)(\sin 2a - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin 2a &= \frac{1}{2} \quad (\because 0 < \sin 2a < 1) \end{aligned}$$

であるから、 $0 < a < \frac{\pi}{4}$ より、求める a の値は

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

である。

(答) $a = \frac{\pi}{12}$

【3】

(1)

線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+1}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

であり、線分 AC の中点 N の座標は

$$\left(\frac{1+x}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = \left(\frac{1+x}{2}, 1, 2\right)$$

である。

$$(\text{答}) \quad M\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) N\left(\frac{1+x}{2}, 1, 2\right)$$

(2)

$\overrightarrow{OA} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 1, 1)$, $\overrightarrow{OC} = (x, 0, 4)$ と表されるから

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 4$$

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2 \cdot x + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 2x + 4$$

であり、 $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{6}$, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{x^2 + 16}$ であるから

$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} \\ &= \frac{2\sqrt{30}}{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \angle BOC &= \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}|} \\ &= \frac{2x+4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{x^2+16}} \\ &= \frac{2x+4}{\sqrt{6x^2+96}} \end{aligned}$$

である。ここで、 $0^\circ \leq \angle AOB \leq 180^\circ$, $0^\circ \leq \angle BOC \leq 180^\circ$ であるから

$$\angle AOB \leq \angle BOC$$

$$\Leftrightarrow \cos \angle AOB \geq \cos \angle BOC$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sqrt{30}}{15} \geq \frac{2x+4}{\sqrt{6x^2+96}}$$

$$\Leftrightarrow 12\sqrt{5x^2+80} \geq 30x+60$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5x^2+80} \geq 5x+10$$

$$\Leftrightarrow 20x^2+320 \geq 25x^2+100x+100 \quad (\because 5x+10 > 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2+20x-44 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x+22) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -22 \leq x \leq 2$$

となる。ここで、 $x > 0$ であるから、 x のとり得る範囲は

$$0 < x \leq 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 < x \leq 2$$

(3)

(2)より

$$\angle AOB = \angle BOC$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \quad (\because x > 0)$$

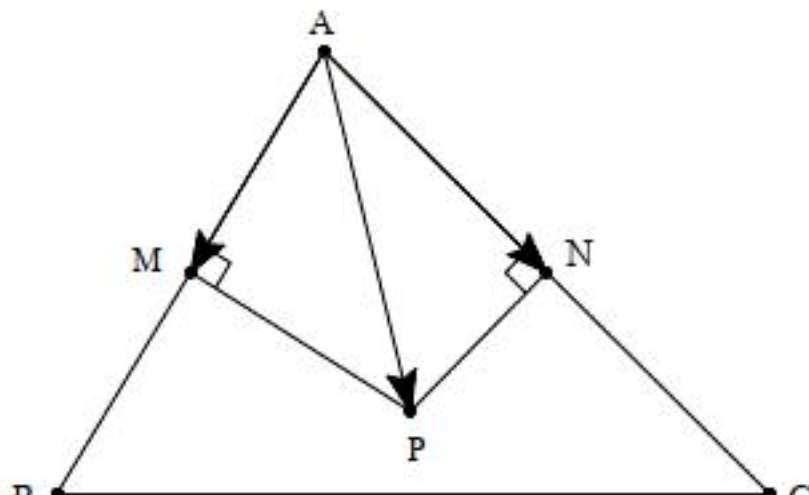
である。ここで、 $\triangle ABC$ の外心 P は平面 α 上にあるから実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

と表される。 $x = 2$ より $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -2, 4)$ であるから

$$\overrightarrow{AP} = (s+t, -s-2t, s+4t)$$

である。ここで、点 P は外心であるから $\triangle ABC$ との位置関係は下図のようになる。



よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} \\ &= \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ &= (s+t, -s-2t, s+4t) - \frac{1}{2}(1, -1, 1) \\ &= \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+\frac{1}{2}, s+4t-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} \\ &= \overrightarrow{AP} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ &= (s+t, -s-2t, s+4t) - \frac{1}{2}(1, -2, 4) \\ &= \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+1, s+4t-2\right) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{AB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+\frac{1}{2}, s+4t-\frac{1}{2}\right) \cdot (1, -1, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow s+t-\frac{1}{2}+s+2t-\frac{1}{2}+s+4t-\frac{1}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow 3s+7t-\frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{NP} \cdot \overrightarrow{AC} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(s+t-\frac{1}{2}, -s-2t+1, s+4t-2\right) \cdot (1, -2, 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow s+t-\frac{1}{2}+(-s-2t+1) \cdot (-2)+(s+4t-2) \cdot 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow 7s+21t-\frac{21}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow s+3t-\frac{3}{2} &= 0 \end{aligned}$$

となる。以上より、これらを連立して解いて

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 3s+7t-\frac{3}{2}=0 \\ s+3t-\frac{3}{2}=0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s=-3 \\ t=\frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} \\ &= (1, 2, 0) + \left(-3+\frac{3}{2}, -(-3)-2 \cdot \frac{3}{2}, -3+4 \cdot \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right) \end{aligned}$$

となり、点 P の座標は $\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$ である。

$$(\text{答}) \quad P\left(-\frac{1}{2}, 2, 3\right)$$

[4]

(1)

与式について、両辺が0以上であるから2乗しても同値性は崩れず

$$\begin{aligned} |3z-4i|^2 &= 4|z-3i|^2 \\ \Leftrightarrow (3z-4i)(3\bar{z}+4i) &= 4(z-3i)(\bar{z}+3i) \\ \Leftrightarrow 9|z|^2+12zi-12\bar{z}i+16 &= 4|z|^2+12zi-12\bar{z}i+36 \\ \Leftrightarrow 5|z|^2 &= 20 \\ \Leftrightarrow |z| &= 2 \quad (\because |z| \geq 0) \end{aligned}$$

となる。よって、 z は中心が原点で半径が2の円を表す。

(答) 中心が原点で半径が2の円

(2)

(1)より、 $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす θ を用いて

$$z = 2(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表される。これを与式に代入すると

$$\begin{aligned} \left| 2(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{1}{2(\cos \theta + i \sin \theta)} + 2i \right| &= \left| 2(\cos \theta + i \sin \theta) + \frac{\cos \theta - i \sin \theta}{2(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta)} + 2i \right| \\ &= \left| \frac{5}{2} \cos \theta + \left(\frac{3}{2} \sin \theta + 2 \right) i \right| \\ &= \sqrt{\frac{25}{4} \cos^2 \theta + \frac{9}{4} \sin^2 \theta + 6 \sin \theta + 4} \\ &= \sqrt{-4 \sin^2 \theta + 6 \sin \theta + \frac{41}{4}} \\ &= \sqrt{-4 \left(\sin \theta - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{25}{2}} \end{aligned}$$

となる。よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ であり、与式は

$$\sin \theta = \frac{3}{4} \text{ のとき} \quad \text{最大値} \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = -1 \text{ のとき} \quad \text{最小値} \frac{1}{2}$$

となる。またそれぞれのときの z の値は

$$\sin \theta = \frac{3}{4} \text{ のとき} \quad z = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\sin \theta = -1 \text{ のとき} \quad z = -2i$$

である。

$$\begin{array}{lll} \text{(答)} & \text{最大値} & z = \pm \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2}i \text{ のとき} \quad \frac{5\sqrt{2}}{2} \\ & \text{最小値} & z = -2i \text{ のとき} \quad \frac{1}{2} \end{array}$$