

[1]

(1)

$g(x) = x - \log(1+x)$ とおくと

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

となるから、 $x > 0$ のとき、常に $g'(x) > 0$ である。よって、 $x > 0$ のとき、 $g(x)$ は単調増加し

$$g(x) > g(0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x > \log(1+x)$$

となる。

(証明終)

(2)

$h(x) = \frac{f(x)}{x}$ とおくと

$$h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となり、 $i(x) = xf'(x) - f(x)$ とおくと

$$i'(x) = f'(x) + xf''(x) - f'(x)$$

$$= xf''(x)$$

となる。ここで、 $x > 0$ で常に $f''(x) < 0$ であるから、 $x > 0$ で $i'(x) < 0$ が常に成立し、 $i(x)$ は単調減少する。よって

$$i(x) < i(0) = 0 \quad (\because f(0) = 0)$$

である。よって、 $\textcircled{1}$ 式に代入して、 $x > 0$ で $h'(x) < 0$ が常に成立し、 $h(x)$ は単調減少する。以上より、関数 $\frac{f(x)}{x}$ は $x > 0$ で減少する。

(証明終)

(3)

$f(x) = \log(1+x)$ とおくと、 $f(0) = 0$ で

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

となり、

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

となる。よって、 $x > 0$ で $f''(x) < 0$ が常に成立し、(2)より $\frac{f(x)}{x} = \frac{\log(1+x)}{x}$ は $x > 0$ で減少する。

よって、 $0 < a < b < 1$ のとき

$$\frac{\log(1+1)}{1} < \frac{\log(1+b)}{b} < \frac{\log(1+a)}{a}$$

となる。したがって

$$\frac{\log(1+b)}{b} < \frac{\log(1+a)}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{\log(1+a)}{\log(1+b)}$$

となり、(1)より $a > \log(1+a) > 0$ であるから

$$\frac{\log(1+1)}{1} < \frac{\log(1+b)}{b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log(1+b)} < \frac{1}{b \log 2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log(1+a)}{\log(1+b)} < \frac{a}{b \log 2}$$

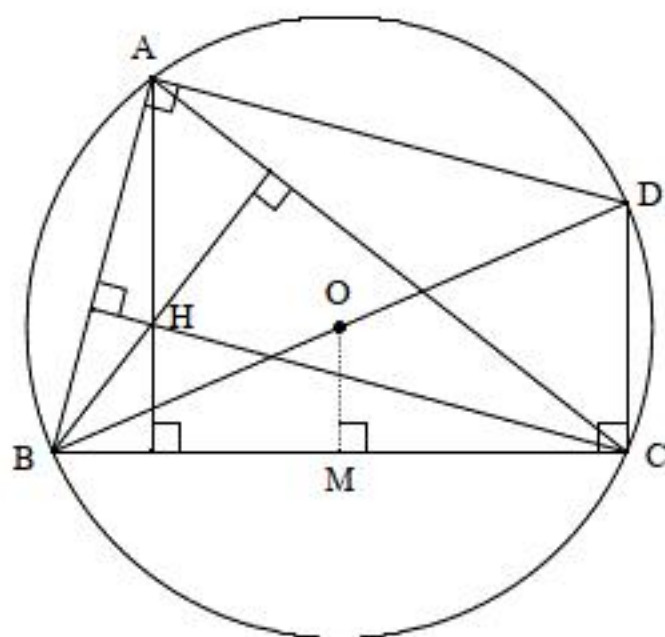
となる。以上より

$$\frac{a}{b} < \frac{\log(1+a)}{\log(1+b)} < \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{a}{b}$$

が成立する。

(証明終)

(1)



(証明終)

(2)

 $\triangle BMO \sim \triangle BCD$
$$AH = 20M$$

(証明終)

(3)

$$2\vec{OM} = \vec{AH}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

(証明終)

〔3〕

(1)

$n=0$ を代入すると

$$f(x)=\begin{cases} |1-x| & (0 \leq x < 2) \\ 1 & (2 \leq x < 3) \end{cases}$$

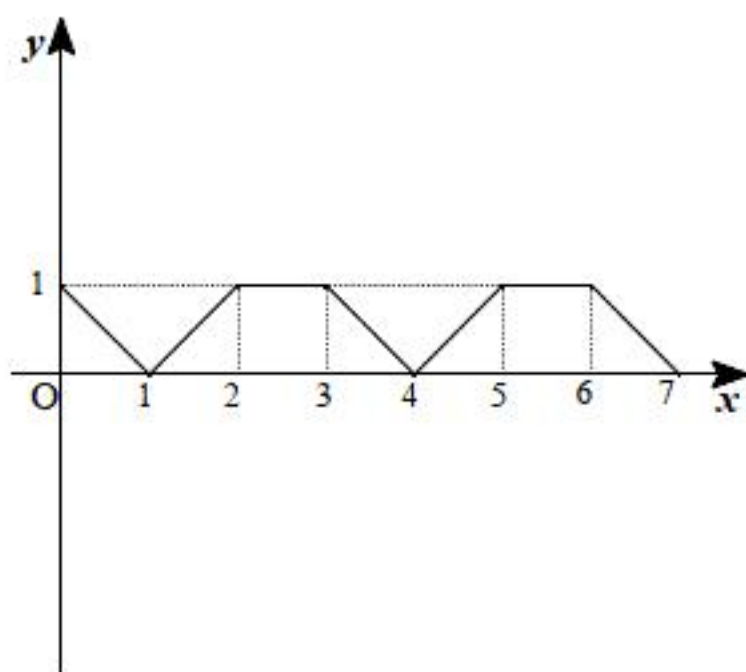
となり、 $n=1$ を代入すると

$$f(x)=\begin{cases} |4-x| & (3 \leq x < 5) \\ 1 & (5 \leq x < 6) \end{cases}$$

となり、 $n=2$ を代入すると

$$f(x)=|7-x| \quad (6 \leq x \leq 7)$$

となる。よって、 $0 \leq x \leq 7$ のとき、 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 上図

(2)

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{3n}^{3n+3} f(x) e^{-x} dx \\ &= \int_{3n}^{3n+1} (3n+1-x) e^{-x} dx + \int_{3n+1}^{3n+2} (x-3n-1) e^{-x} dx + \int_{3n+2}^{3n+3} e^{-x} dx \end{aligned}$$

である。ここで、部分積分を用いて、 C を積分定数とすると

$$\begin{aligned} \{(x-3n-1)e^{-x}\}' &= (3n+1-x)e^{-x} + e^{-x} \\ \Leftrightarrow \int (3n+1-x)e^{-x} dx &= (x-3n-1)e^{-x} + e^{-x} + C = (x-3n)e^{-x} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{(3n+1-x)e^{-x}\}' &= (x-3n-1)e^{-x} - e^{-x} \\ \Leftrightarrow \int (x-3n-1)e^{-x} dx &= (3n+1-x)e^{-x} - e^{-x} + C = (3n-x)e^{-x} + C \end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned} I_n &= \left[(x-3n)e^{-x} \right]_{3n}^{3n+1} + \left[(3n-x)e^{-x} \right]_{3n+1}^{3n+2} + \left[-e^{-x} \right]_{3n+2}^{3n+3} \\ &= e^{-3n-1} - 2e^{-3n-2} + e^{-3n-1} - e^{-3n-3} + e^{-3n-2} \\ &= (2e^2 - e - 1)e^{-3n-3} \\ &= e^{-3n-3}(2e+1)(e-1) \end{aligned}$$

である。

(答) $I_n = e^{-3n-3}(2e+1)(e-1)$

(3)

$$\begin{aligned} J_n &= \sum_{k=0}^{n-1} I_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-3k-3}(2e+1)(e-1) \end{aligned}$$

である。よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ は初項が $e^{-3}(2e+1)(e-1)$ 、公比が e^{-3} の無限等比級数であるから、

$0 < e^{-3} < 1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = e^{-3}(2e+1)(e-1) \cdot \frac{1}{1-e^{-3}} = \frac{2e+1}{e^2+e+1}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{2e+1}{e^2+e+1}$

〔4〕

(1)

$|p|, |q|$ がともに $\frac{|r|}{2}$ 未満であると仮定する。このとき、 $p = q + r$ より

[1] $r \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} |q+r| &< \frac{|r|}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{r}{2} &< q+r < \frac{r}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{3}{2}r &< q < -\frac{r}{2} \\ \therefore |q| &> \frac{|r|}{2} \end{aligned}$$

となり、仮定と矛盾する。

[2] $r < 0$ のとき

$$\begin{aligned} |q+r| &< \frac{|r|}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{r}{2} &< q+r < -\frac{r}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{r}{2} &< q < -\frac{3}{2}r \\ \therefore |q| &> \frac{|r|}{2} \end{aligned}$$

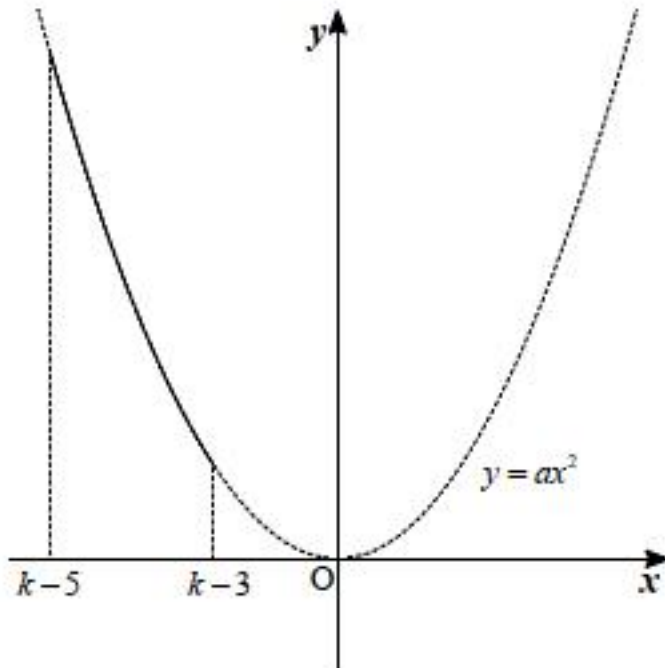
となり、仮定と矛盾する。

以上、[1][2]より、背理法により、 $p - q = r$ ならば、 $|p|$ と $|q|$ のうち少なくとも一方は $\frac{|r|}{2}$ 以上であることが示された。

(証明終)

(2)

[1] $0 \leq k < 3$ のとき



上図より

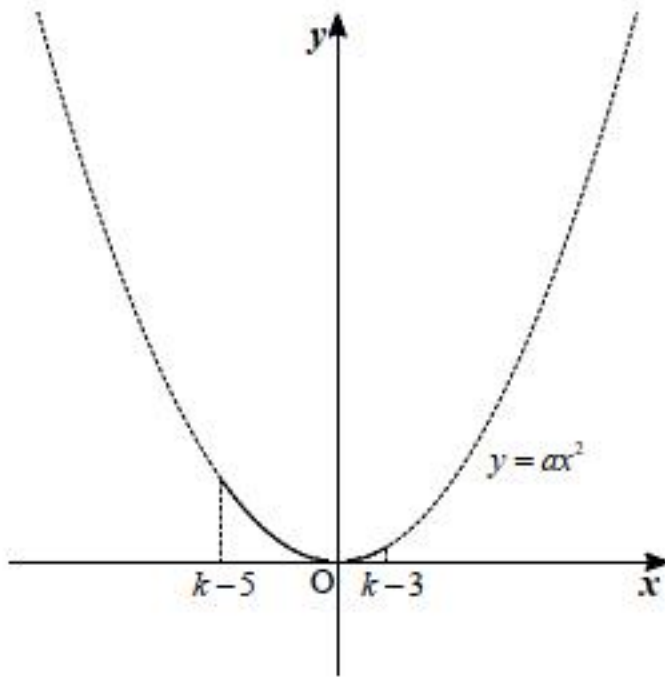
$$\begin{aligned} L &= f(k-5) \\ &= a(k^2 - 10k + 25) \\ S &= f(k-3) \\ &= a(k^2 - 6k + 9) \end{aligned}$$

であるから

$$L - S = a(16 - 4k) \geq a \quad (\because 0 \leq k < 3)$$

となり、不等式は成立する。

[2] $3 \leq k \leq 4$ のとき



上図より

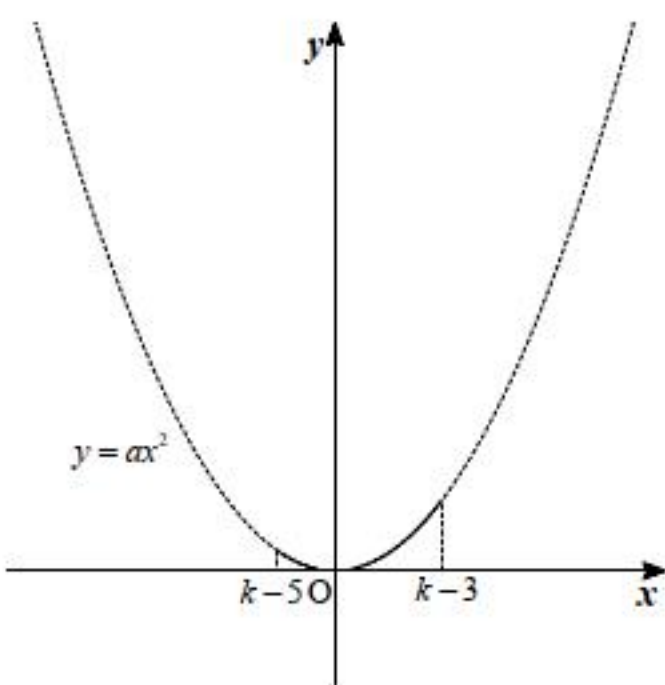
$$\begin{aligned} L &= f(k-5) \\ &= a(k-5)^2 \\ S &= f(0) = 0 \end{aligned}$$

であるから

$$L - S = a(k-5)^2 \geq a \quad (\because 3 \leq k \leq 4)$$

となり、不等式は成立する。

[3] $4 \leq k \leq 5$ のとき



上図より

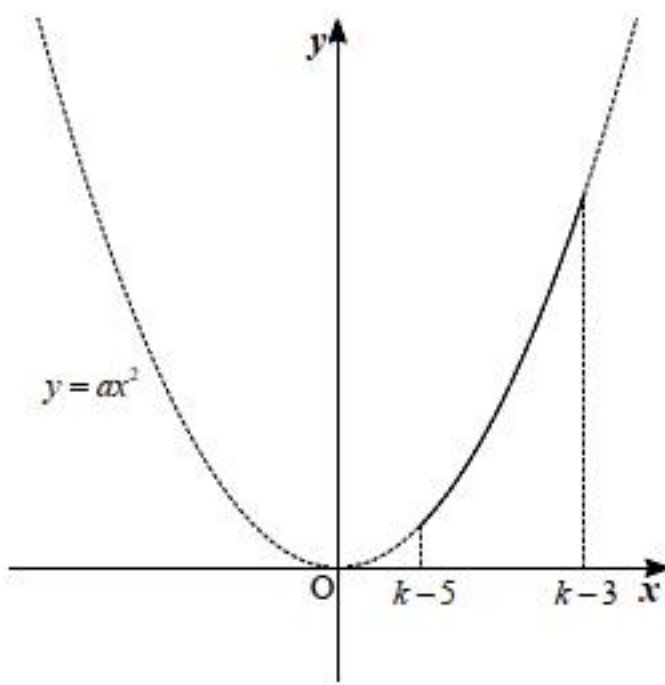
$$\begin{aligned} L &= f(k-3) \\ &= a(k-3)^2 \\ S &= f(0) = 0 \end{aligned}$$

であるから

$$L - S = a(k-3)^2 \geq a \quad (\because 4 \leq k \leq 5)$$

となり、不等式は成立する。

[4] $5 < k$ のとき



上図より

$$\begin{aligned} L &= f(k-3) \\ &= a(k^2 - 6k + 9) \\ S &= f(k-5) \\ &= a(k^2 - 10k + 25) \end{aligned}$$

であるから

$$L - S = a(4k - 16) \geq a \quad (\because 5 < k)$$

となり、不等式は成立する。

以上、[1][2][3][4]より、不等式 $L - S \geq a$ は確かに成立する。

(証明終)

(3)

(2)で、 $x - k = t$ と置くと、 $h(t) = a(t+k)^2$ の $-5 \leq t \leq -3$ における最大値を L' 、最小値を S' とすると、 $L' - S' \geq a$ をみたす。ここで

$$h(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

とすると、 $k = \frac{b}{2a}$ として、定数項は最大値と最小値の差に影響しないことより、 $h(x)$ の $-5 \leq x \leq -3$ における最大値を L_1 、最小値を S_1 としても、 $L_1 - S_1 \geq a$ をみたす。よって、

$L_1 - S_1 = d$ となる a 以上の d が存在し、(1)より $|L_1|$ または $|S_1|$ のうち少なくとも一方は $\frac{|d|}{2}$ 以上である。さらに、 $g(x) = |h(x)|$ より $g(x)$ の最大値 M は $|L_1|$ と $|S_1|$ の大きい方であるから、 $d \geq$

$a > 0$ より

$$M \geq \frac{a}{2}$$

である。

(証明終)