

平成 31 年度 入学者選抜学力検査問題

数 学 (理系 β)

数学 I, 数学 A
数学 II, 数学 B
数学 III

注 意 事 項

1. 試験開始の合図があるまで、問題冊子及び解答用紙の中を見てはいけません。
2. 問題は全部で 4 題あります。また、解答用紙は 4 枚あります。
3. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁及び解答用紙の枚数の過不足や汚れ等に気がついた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
4. 試験開始後、すべての解答用紙に受験番号、志望学部及び氏名を記入してください。
受験番号の記入欄は各解答用紙に 2 箇所あります。
5. 解答は各問、指定された番号の解答用紙のおもて面にだけ記入してください。
6. 指定された番号以外の解答用紙に解答を記入した場合、採点の対象となりません。
7. 裏面その他に解答を記入した場合、その部分は採点の対象となりません。
8. 各問題の配点 50 点は 200 点満点としたときのものです。
9. 試験終了後、問題冊子は持ち帰ってください。

〔 1 〕 （配点 50） 次の問いに答えなさい。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) $x > 0$ のとき、不等式 $x > \log(1+x)$ が成り立つことを示しなさい。
- (2) 関数 $f(x)$ は、 $x \geq 0$ で定義された連続関数で、 $f(0) = 0$ を満たし、 $x > 0$ で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもつとする。 $x > 0$ で常に $f''(x) < 0$ ならば、関数 $\frac{f(x)}{x}$ は $x > 0$ で減少することを示しなさい。
- (3) $0 < a < b < 1$ のとき、次の不等式が成り立つことを示しなさい。

$$\frac{a}{b} < \frac{\log(1+a)}{\log(1+b)} < \frac{1}{\log 2} \cdot \frac{a}{b}$$

〔 2 〕 （配点 50） 三角形の 3 頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は、1 点で交わる。その点を三角形の垂心という。

$\triangle ABC$ の外心を O 、垂心を H とするとき、次の問いに答えなさい。ただし、 $\triangle ABC$ は直角三角形ではないとする。

(1) 直線 OB と $\triangle ABC$ の外接円との交点で B でない点を D とする。四角形 $AHCD$ は平行四辺形であることを示しなさい。

(2) 辺 BC の中点を M とする。 $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ が成り立つことを示しなさい。

(3) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$ が成り立つことを示しなさい。

〔 3 〕 （配点 50） 実数 x に対して, $3n \leq x < 3n + 3$ を満たす整数 n により,

$$f(x) = \begin{cases} |3n + 1 - x| & (3n \leq x < 3n + 2 \text{ のとき}) \\ 1 & (3n + 2 \leq x < 3n + 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする。関数 $f(x)$ について, 次の問いに答えなさい。ただし, e は自然対数の底とする。

(1) $0 \leq x \leq 7$ のとき, $y = f(x)$ のグラフをかきなさい。

(2) 0 以上の整数 n に対して, $I_n = \int_{3n}^{3n+3} f(x) e^{-x} dx$ とする。 I_n を求めなさい。

(3) 自然数 n に対して, $J_n = \int_0^{3n} f(x) e^{-x} dx$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ を求めなさい。

〔 4 〕 （配点 50） 次の問いに答えなさい。

- (1) p, q, r を実数とする。 $p - q = r$ ならば、 $|p|$ と $|q|$ のうち少なくとも一方は $\frac{|r|}{2}$ 以上であることを示しなさい。
- (2) a, k は実数で、 $a > 0, k \geq 0$ とする。関数 $f(x) = ax^2$ の $k - 5 \leq x \leq k - 3$ における最大値を L 、最小値を S とする。このとき、不等式 $L - S \geq a$ が成り立つことを示しなさい。
- (3) a, b, c は実数で、 $a > 0, b \geq 0$ とする。関数 $g(x) = |ax^2 + bx + c|$ の $-5 \leq x \leq -3$ における最大値を M とする。このとき、不等式 $M \geq \frac{a}{2}$ が成り立つことを示しなさい。

