

(解答を解答欄に書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。)

問題 1

k を実数とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = 2x^3 - 3kx^2 + 1$ とする。

(1) $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解(重解の場合は 1 つとみなす)を持つための k の条件を求めよ。

(2) $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解 α をもち、 $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha|^n$ が収束するための k の条件を求めよ。

数学〔Ⅲ・C〕

受 験 番 号

小 計

(解答を解答欄に書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。)

問題 2

(1) 次の不定積分を求めよ。

(i) $\int \tan \frac{\pi}{4} x dx$ (ii) $\int x e^{-x} dx$

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 不等式 $x e^{-x} \geq \frac{1}{e} \tan \frac{\pi}{4} x$ が成立することを示せ。

(3) $g(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{e} \tan \frac{\pi}{4} x + \frac{x}{e^x} - \left| \frac{1}{e} \tan \frac{\pi}{4} x - \frac{x}{e^x} \right| \right\}$ とする。定積分 $\int_0^{\frac{4}{3}} g(x) dx$ の値を求めよ。

数学〔Ⅲ・C〕

受 験 番 号

小 計

(解答を解答欄に書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。)

問題 3

実数を成分とする 2 次の正方行列について次の(1), (2)に答えよ。

(1) i) 2つの行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$ と $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ が $AX = XA$ を満たすとき, X を x, z, A, E を用いて表せ。ただし, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である。

ii) i) の A, X について, さらにもう 1 つの行列 X' も $AX' = X'A$ を満たすとき, $XX' = X'X$ が成立することを示せ。

iii) 行列 B は, 逆行列をもつ行列 T と i) の A により $B = TAT^{-1}$ と表されているとする。2 つの行列 Y, Y' が $BY = YB, BY' = Y'B$ を満たすとき, $YY' = Y'Y$ が成立することを示せ。

(2) $B = \begin{pmatrix} h & k \\ l & m \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ の形ではないとする。 q, s を $\begin{pmatrix} h & k \\ l & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ で定めるとき, 実数 p, r を適当に選べば $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ が逆行列をもつようにできることを示せ。

数学〔Ⅲ・C〕

受 験 番 号

小 計

(解答を解答欄に書ききれないときはこの用紙の裏面を利用してもよい。)

問題 4

平面上の 2 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ に対して, $AP + BP = 2\sqrt{2}$ を満たす点 P の軌跡は $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ で表される。これを証明するために次の問いに答えよ。

- (1) 点 $Q(x, y)$ が C 上にあれば, $AQ = \sqrt{2} - \frac{x}{\sqrt{2}}$ となることを示せ。
- (2) 点 $Q(x, y)$ が $\frac{x^2}{2} + y^2 > 1$ を満たしていれば, $AQ + BQ > 2\sqrt{2}$ となることを示せ。
- (3) $AP + BP = 2\sqrt{2}$ を満たす点 P の軌跡が C であることを証明するには, どのようなことを示したらよいのかを明確に述べ, かつそれを示せ。

数学〔Ⅲ・C〕

受 験 番 号

小 計