

問題 1

(1)

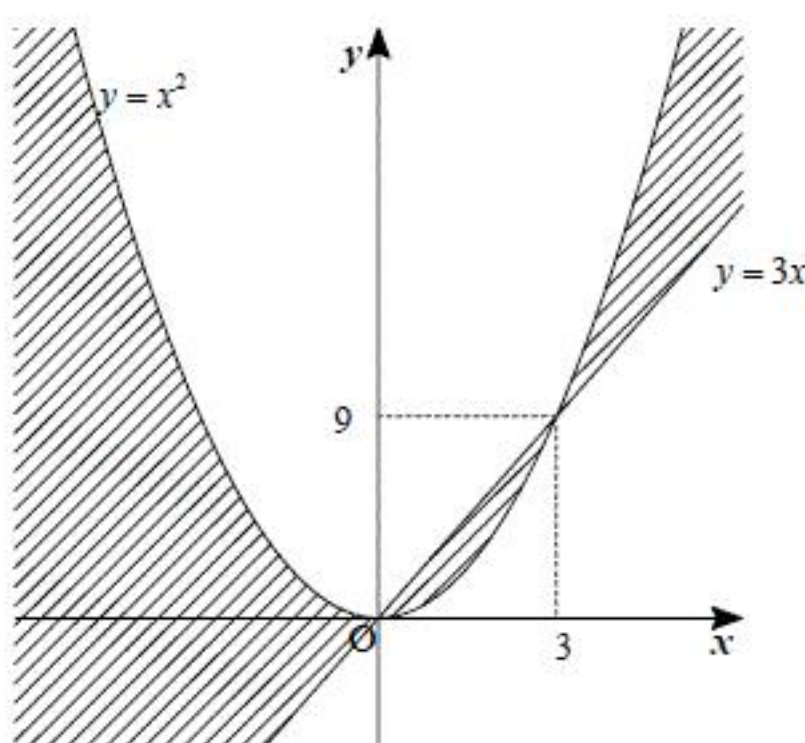
与えられた不等式より

$$\begin{cases} y-x^2 < 0 \\ y-3x > 0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} y-x^2 > 0 \\ y-3x < 0 \end{cases}$$

であれば良い。これを図示すると下図のようになる。



従って、求める領域は図の斜線部である。ただし、境界は含まない。

(答) 前図斜線部(ただし境界を含まない)

(2)

与えられた数を2のべき乗で表すと

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 2^{\frac{1}{2}} \\ 0.5^{-\frac{3}{4}} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{3}{4}} \\ \sqrt[3]{8} &= 2^{\frac{3}{3}} \\ 4^{\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

となる。2>1より小さい順に並べると

$$\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, 4^{\frac{1}{3}}, 0.5^{-\frac{3}{4}}$$

である。

(答) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{8}, 4^{\frac{1}{3}}, 0.5^{-\frac{3}{4}}$

(3)(i)

$f(x)=3x^2+7x$ より平均変化率は

$$\begin{aligned} \frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} &= \frac{48-(-4)}{4} \\ &= 13 \end{aligned}$$

である。また、この平均変化率は2点 $(-1, -4), (3, 48)$ を通る直線の傾きを表す。

(答) 13

(ii)

$f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x)=6x+7$$

であるから

$$f'(-1)=1$$

となる。また、この微分係数は $x=-1$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きを表す。

(答) 1

(4)

n が自然数のとき

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + n(2n+1) = \frac{1}{6}n(n+1)(4n+5)$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= 1 \cdot 3 \\ &= 3 \\ (\text{右辺}) &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot (1+1)(4+5) \\ &= 3 \end{aligned}$$

であるから、(左辺)=(右辺)より成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数)で成り立つことを仮定する

与式に $n=k$ を代入して

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + k(2k+1) = \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5)$$

が成り立つから、両辺に $(k+1)(2k+3)$ を加えると

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + k(2k+1) + (k+1)(2k+3) &= \frac{1}{6}k(k+1)(4k+5) + (k+1)(2k+3) \\ \Leftrightarrow 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + k(2k+1) + (k+1)(2k+3) &= \frac{1}{6}(k+1)\{k(4k+5) + 6(2k+3)\} \\ \Leftrightarrow 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + k(2k+1) + (k+1)(2k+3) &= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(4k+9) \\ \Leftrightarrow 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \cdots + k(2k+1) + (k+1)(2k+3) &= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{4(k+1)+5\} \end{aligned}$$

となるため $n=k+1$ のときも成り立つ。

以上[1]. [2]より数学的帰納法から等式が成り立つことが証明された。

(証明終)

問題 2

(1)

$0 \leq \sin \theta \leq 1$ であることを考えると与式は

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x - \sin \theta| dx &= \int_0^{\sin \theta} (\sin \theta - x) dx + \int_{\sin \theta}^1 (x - \sin \theta) dx \\ &= \left[x \sin \theta - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^{\sin \theta} + \left[\frac{1}{2} x^2 - x \sin \theta \right]_{\sin \theta}^1 \\ &= \left(\sin^2 \theta - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) + \left(\frac{1}{2} - \sin \theta \right) - \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta - \sin^2 \theta \right) \\ &= \sin^2 \theta - \sin \theta + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \sin^2 \theta - \sin \theta + \frac{1}{2}$$

(2)

$t = \sin \theta$ とおくと, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で $0 \leq t \leq 1$ である。また, $F(\theta) = f(t)$ とおけば

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 - t + \frac{1}{2} \\ &= \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

より, $t = 0, 1$ で最大値 $f(0) = f(1) = \frac{1}{2}$ をとり, $t = \frac{1}{2}$ で最小値 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ をとる。つまり,

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき最小値 $\frac{1}{4}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } \frac{1}{2}, \theta = \frac{\pi}{6} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{4}$$

(3)

$0 \leq \cos \theta \leq 1$ より (1) と同様にして

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{|x - \sin \theta| + |x - \cos \theta|\} dx &= \left(\sin^2 \theta - \sin \theta + \frac{1}{2} \right) + \left(\cos^2 \theta - \cos \theta + \frac{1}{2} \right) \\ &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - (\sin \theta + \cos \theta) + 1 \\ &= 2 - \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

が得られる。 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ で $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ より与式は $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値 1 を

とり, $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = 1$ のとき最小値 $2 - \sqrt{2}$ をとる。つまり, $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のとき最大値 1, $\theta = \frac{\pi}{4}$ の

とき最小値 $2 - \sqrt{2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad \theta = 0, \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } 1, \theta = \frac{\pi}{4} \text{ のとき最小値 } 2 - \sqrt{2}$$

問題 3

(1)

$(3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 2, 0), (0, 3, 0), (2, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 0, 2), (0, 1, 2), (0, 0, 3)$ の10個である。

(答) 10 個

(2)

$A(99, 0, 0), B(0, 99, 0), C(0, 0, 99), P(i, j, k)$ とおくと点 P は α 上にあるから、実数 x, y を用いて

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$$

とおける。すなわち

$$\begin{pmatrix} i-99 \\ j \\ k \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -99 \\ 99 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -99 \\ 0 \\ 99 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -99x-99y \\ 99x \\ 99y \end{pmatrix}$$

である。従って

$$\begin{cases} i-99 = -99x-99y \\ j = 99x \\ k = 99y \end{cases}$$

であるから、

$$i-99 = -j-k \\ \Leftrightarrow i = 99-j-k$$

が示される。

(証明終)

(3)

(2)より $P(99-j-k, j, k)$ とおける。 k を0から99までの整数とすると、 z 座標が k となる α 上の非負の格子点の x 座標は0から $99-k$ までであるので、格子点の数は $100-k$ 個である。従って求める個数は

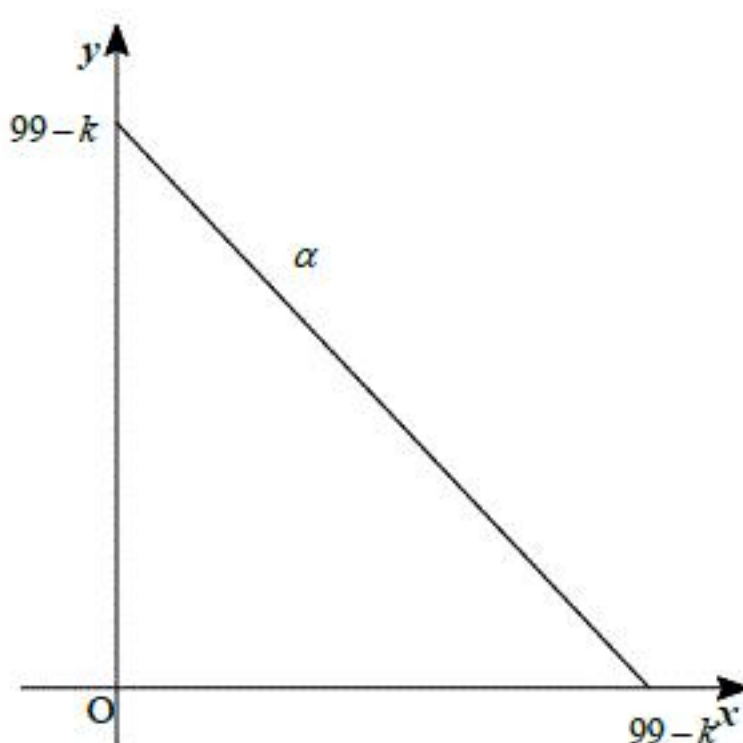
$$\sum_{k=0}^{99} (100-k) = 100+99+\cdots+2+1 \\ = \frac{100(100+1)}{2} \\ = 5050$$

である。

(答) 5050 個

(4)

$\overrightarrow{OR}$ の z 成分は0より、問の条件を満たす2点 P, Q は同じ z 座標である。 k を0から98までの整数として $z=k$ における平面 α の断面は下図のようになる。



この中から、2点とれば $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{PQ}$ は平行になり、その数は ${}_{100-k}C_2$ 個である。よって、求める組数は

$$\sum_{k=0}^{98} {}_{100-k}C_2 = \sum_{k=2}^{100} {}_kC_2 \\ = \sum_{k=2}^{100} \frac{k(k-1)}{2} \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{100} (k^2 - k) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \cdot 100 \cdot 101 \cdot 201 - \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 101 \right) \\ = 166650$$

である。

(答) 166650 組