

問題 1

(1)(i)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 2x} - 3x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 2x - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 2x} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x\sqrt{9 + \frac{2}{x}} + 3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{9 + \frac{2}{x}} + 3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{3}$

(ii)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x}{\sin 3x \sin 4x} &= \frac{2}{3 \cdot 4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \cdot \frac{4x}{\sin 4x} \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{1}{6}$

(iii)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 6x}{|x|} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 - 6x}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (6 - 5x) \\ &= 6\end{aligned}$$

となる。

(答) 6

(2)(i)

A, B を代入して

$$\begin{aligned}BA &= (5 \quad 2) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (8 \quad 17)\end{aligned}$$

となる。

(答) (8 17)

(ii)

B, C を代入して

$$\begin{aligned}CB &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} (5 \quad 2) \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 5 & 2 \\ \frac{5}{2} & 1 \end{pmatrix}$

(iii)

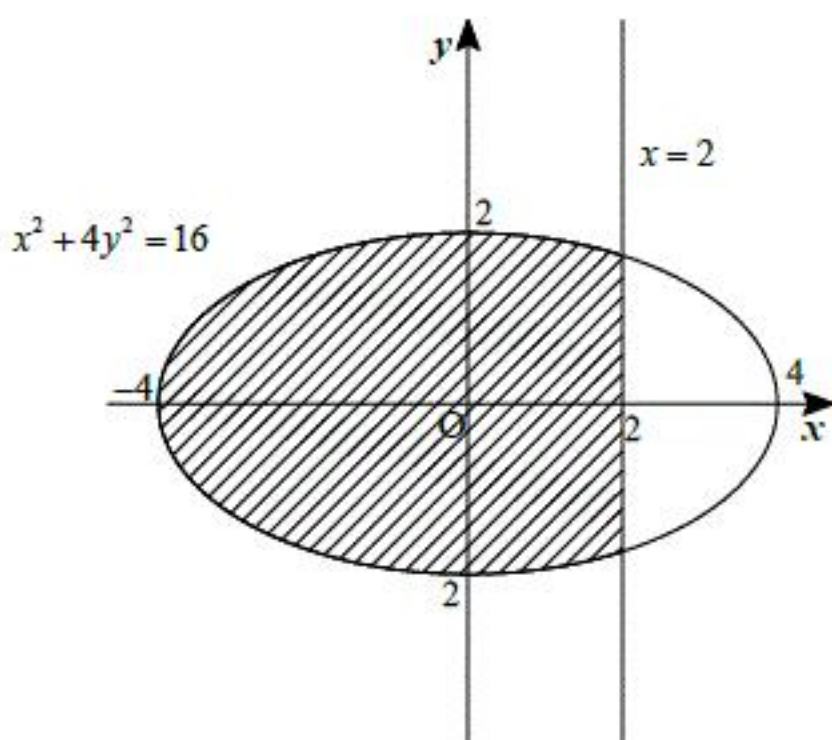
$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ であるので

$$\begin{aligned}BA^{-1}C &= \frac{1}{5} (5 \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{3}{10}$

(3)



A は上図斜線部より求める体積は

$$\begin{aligned}\pi \int_{-4}^2 y^2 dx &= \pi \int_{-4}^2 \frac{16 - x^2}{4} dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[16x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-4}^2 \\ &= 18\pi\end{aligned}$$

である。

(答) 18π

問題 2

(1)

①の両辺を1階微分, 2階微分すると

$$\begin{aligned}y' &= e^{-x} - xe^{-x} \\&= (1-x)e^{-x} \\y'' &= -e^{-x} - (1-x)e^{-x} \\&= (x-2)e^{-x}\end{aligned}$$

となるから, 増減表を書くと下のようになる。

x	...	1	...	2	...
y'	+	0	-		-
y''	-		-	0	+
y	↗		↘		↗

従って $x=1$ のとき極大値 $\frac{1}{e}$ であり, 変曲点は $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$ である。

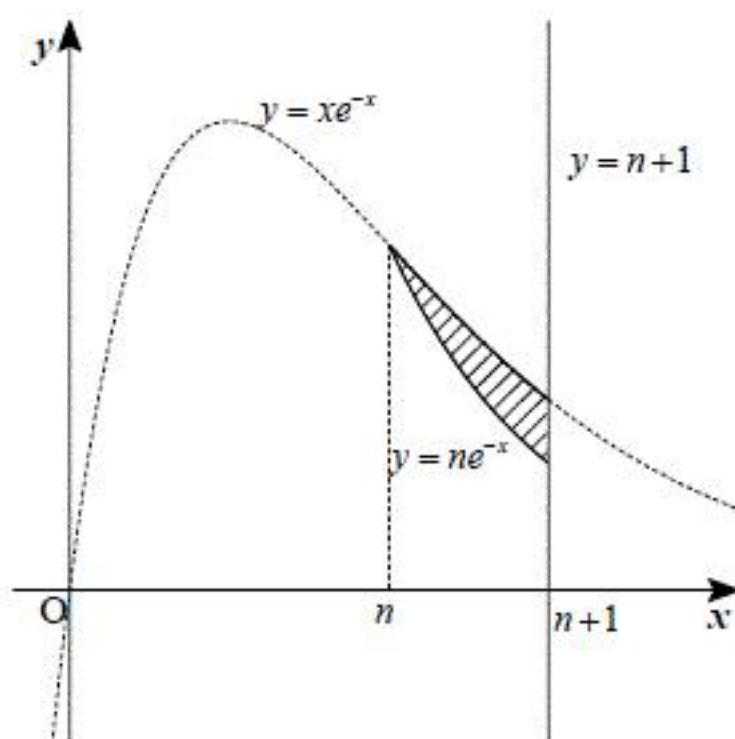
(答) 極大値 $\frac{1}{e}$, 変曲点 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$

(2)

$n \leq x < n+1$ の範囲で考えると②は

$$y = ne^{-x}$$

と表せる。従って, グラフを書くと下のようになる。



従って A_n は

$$\begin{aligned}A_n &= \int_n^{n+1} (xe^{-x} - ne^{-x}) dx \\&= \int_n^{n+1} (x-n) \{-(e^{-x})'\} dx \\&= \left[-(x-n)e^{-x} \right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} e^{-x} dx \\&= \left[(-x+n-1)e^{-x} \right]_n^{n+1} \\&= \left(1 - \frac{2}{e}\right) e^{-n}\end{aligned}$$

が得られる。従って無限級数の和は

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} A_n &= \left(1 - \frac{2}{e}\right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} \\&= \left(1 - \frac{2}{e}\right) \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} \\&= \frac{e-2}{e(e-1)}\end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{e-2}{e(e-1)}$

問題 3

(1)

問題文より

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

が得られる。 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ より

$$A \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

また

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{cases} x - 2y = x \\ y = 0 \end{cases}$$

より、 a を0でない任意の実数とすると $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ は $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たすことがわかる。

(証明終)

(2)

$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく。ハミルトン・ケーリーの定理より

$$B^2 - (a+d)B + (ad-bc)E = O$$

となる。 $B^2 = B$ より

$$(a+d-1)B = (ad-bc)E \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。

[1] $a+d-1 \neq 0$ のとき

$B = kE$ と表せる。 $B^2 = B$ より

$$k^2 = k$$

$$\Leftrightarrow k = 0, 1$$

である。

$k=0$ のとき $B=O$ となり不適である。

$k=1$ のとき $B=E$ となり

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ で成り立つ。

[2] $a+d-1=0$ のとき

①式より

$$ad-bc=0$$

となる。ここで与式について解くと

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

である。 $\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$ の逆行列は

$$(a-1)(d-1)-bc = (ad-bc)-(a+d-1)$$

$$= 0$$

より存在しない。従って、 $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でない解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ があるとがわかる。

以上[1], [2]より $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を満たす $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でない解 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ があることがわかる。

(証明終)