

問題 1

(1)

(ア)

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$$

であり

$$0<a<b, a+b=1$$

を満たすから

$$\begin{aligned}0 < 1-4ab \\ \Leftrightarrow ab < \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となることが示された。

(証明終)

(イ)

(ア)の結果を用いて

$$2ab<\frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。また

$$\begin{aligned}a^2+b^2-\frac{1}{2} &= (a+b)^2-2ab-\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}-2ab \\ &= 2\left(\frac{1}{4}-ab\right) > 0\end{aligned}$$

であるから

$$a^2+b^2>\frac{1}{2} \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。よって、①、②より

$$2ab<\frac{1}{2}<a^2+b^2$$

である。

(答) $2ab, \frac{1}{2}, a^2+b^2$

(2)

$$\begin{aligned}y &= \sin x - \sqrt{3} \cos x + 1 \\ &= 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 1\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}0 \leq x < 2\pi \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi\end{aligned}$$

であることから、 y は

$$\begin{aligned}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}, \text{ すなわち, } x = \frac{5}{6}\pi \text{ のとき最大値 } 3 \\ x - \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi, \text{ すなわち, } x = \frac{11}{6}\pi \text{ のとき最小値 } -1\end{aligned}$$

をとる。

(答) 最大値3, 最小値-1

(3)

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ について

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。ここで $f(x)$ が $x=-1, x=3$ で極値をとることから、 $x=-1, x=3$ は $f'(x)=0$ を満たす。よって

$$\begin{aligned}\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(3)=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2a+b=0 \\ 27+6a+b=0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow (a, b)=(-3, -9)\end{aligned}$$

となる。よって

$$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$$

となり、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、極大値は $f(-1)=6$ となり、極小値は $f(3)=-26$ となる。

(答) 極大値6, 極小値-26

(4)

命題「すべての自然数 n に対して、 $3^{n+2}+4^{2n+1}$ は13の倍数である」ことを数学的帰納法を用いて示す。

[1] $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}3^{1+2}+4^{2\cdot 1+1} &= 91 \\ &= 13 \cdot 7\end{aligned}$$

となり、13の倍数となる。

[2] $n=k$ (k は自然数)のとき、命題が成り立つと仮定する

ある自然数 m を用いて

$$3^{k+2}+4^{2k+1}=13m$$

と表される。このとき

$$\begin{aligned}3^{(k+1)+2}+4^{2(k+1)+1} &= 3^{k+3}+4^{2k+3} \\ &= 3^{k+3}+16 \cdot 4^{2k+1} \\ &= 3 \cdot 3^{k+2}+16 \cdot (13m-3^{k+2}) \\ &= -13 \cdot 3^{k+2}+16 \cdot 13m \\ &= 13(16m-3^{k+2})\end{aligned}$$

となり、 $n=k+1$ のときも命題は成り立つ。

以上、[1]、[2]より、すべての自然数 n に対して、 $3^{n+2}+4^{2n+1}$ は13の倍数であることが示された。

(証明終)

問題 2

(1)

$AP=a$ のとき点 P は点 A から三角形 BDE に下ろした垂線の足に一致するから、四面体 ABDE の体積に注目すると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\cdot(BD^2\sin60^\circ)\cdot a\cdot\frac{1}{3}&=\frac{1}{2}AB\cdot AD\cdot AE\cdot\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow\frac{1}{6}(\sqrt{3})a&=\frac{1}{6} \\ \Leftrightarrow a&=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

となる。また、 $x=b$ は切り口が正三角形 CFH であるときで、立方体 ABCD-EFGH は線分 AG の中点に対して点対称であることから

$$b=AG-a$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}AG&=\sqrt{AC^2+CG^2} \\ &=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2} \\ &=\sqrt{3}\end{aligned}$$

であることから

$$b=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

となる。

$$(\text{答})\ a=\frac{1}{\sqrt{3}}, b=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2)

$A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $D(0, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$ とするような XYZ 座標空間を設定する。

動点 P を通り線分 AG に垂直な平面を α とし、平面 α と X 軸との交点の X 座標を t とする。

平面 α と 3 つの座標軸に囲まれた四面体の体積に注目すると

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}t\cdot\sqrt{2}t\sin60^\circ\right)\cdot x\cdot\frac{1}{3}&=\left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot t\right)\cdot t\cdot\frac{1}{3} \\ \Leftrightarrow t&=\sqrt{3}x\end{aligned}$$

となる。

[1] $0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき

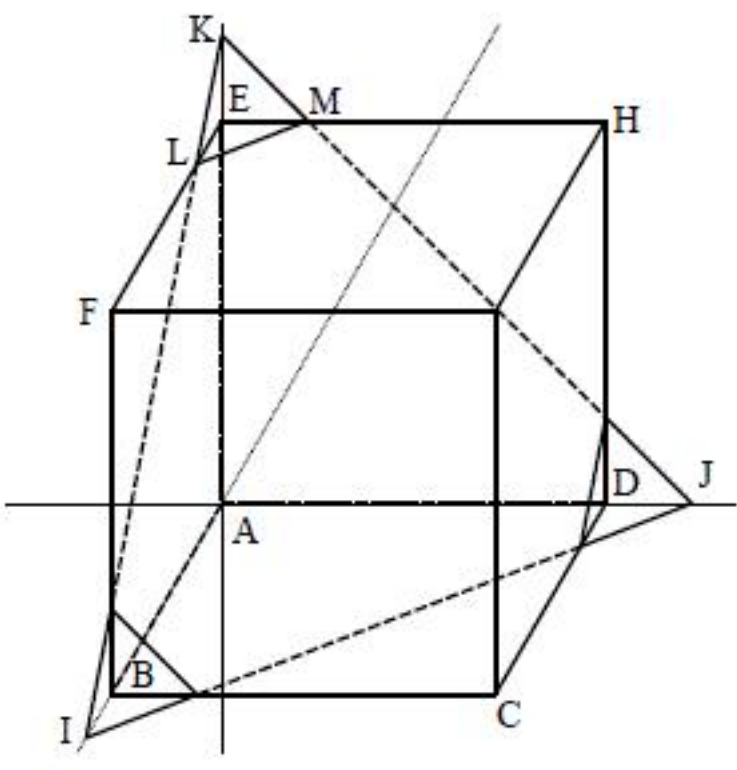
(1)の結果を用いて切り口は正三角形となるから

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}t)\cdot(\sqrt{2}t)\cdot\sin60^\circ \\ &=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2 \\ &=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2\end{aligned}$$

となる。

[2] $\frac{1}{\sqrt{3}}< x<\frac{2}{\sqrt{3}}$ のとき

平面 α と X 軸、 Y 軸、 Z 軸の交点をそれぞれ I, J, K とし、KI と EF、KJ と EH との交点をそれぞれ L, M とおく。



$\triangle KLE\sim\triangle KIA$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{KL}{KI}&=\frac{KE}{KA} \\ \Leftrightarrow\frac{KL}{\sqrt{6}x}&=\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x} \\ \Leftrightarrow KL&=\sqrt{2}(\sqrt{3}x-1)\end{aligned}$$

となる。図形の対称性から

$$\begin{aligned}S(x)&=\triangle KIJ-(3\triangle KLM) \\ &=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left\{\sqrt{2}(\sqrt{3}x-1)\right\}^2\cdot\sin60^\circ \\ &=-3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。

[3] $\frac{2}{\sqrt{3}}\leq x\leq\sqrt{3}$ のとき

線分 AG の中点に対して、立方体は点対称であることから、[1]の場合の結果において x を $\sqrt{3}-x$ に置き換えて

$$S(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-x)^2$$

となる。

以上[1], [2], [3]から

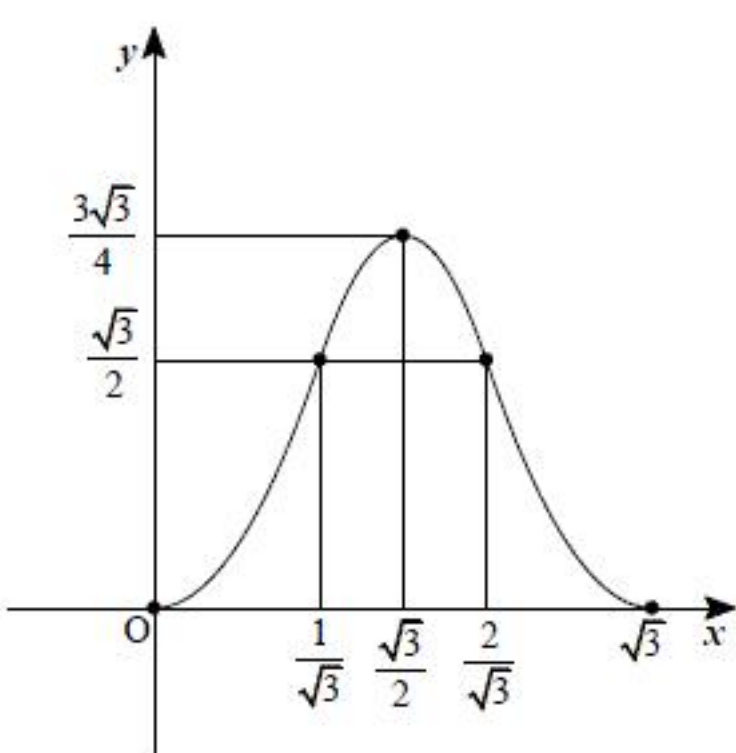
$$S(x)=\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 & (0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ -3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2} & (\frac{1}{\sqrt{3}}< x<\frac{2}{\sqrt{3}}) \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-x)^2 & (\frac{2}{\sqrt{3}}\leq x\leq\sqrt{3})\end{cases}$$

となる。

$$(\text{答})\ S(x)=\begin{cases}\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 & (0\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{3}}) \\ -3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2} & (\frac{1}{\sqrt{3}}< x<\frac{2}{\sqrt{3}}) \\ \frac{3\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-x)^2 & (\frac{2}{\sqrt{3}}\leq x\leq\sqrt{3})\end{cases}$$

(3)

(2)の結果を用いて、求めるグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(4)

$a<x<b$, つまり、 $\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{2}{\sqrt{3}}$ において $S(x)=-3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ であることから

$$\begin{aligned}\int_a^b S(x)dx&=\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\left(-3\sqrt{3}x^2+9x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)dx \\ &=\left[-\sqrt{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-\frac{3\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}} \\ &=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答})\ \frac{2}{3}$$

問題 3

(1)

$a_{n+1} = 2^{n^2-25n-12} a_n$ においてすべての自然数 n に対して $2^{n^2-25n-12} > 0$ であり, $a_1 > 0$ であるから帰納的に考えて, すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ となる。よって

$$a_{n+1} = 2^{n^2-25n-12} a_n$$

について, 両辺 2 を底とする対数をとると

$$\log_2 a_{n+1} = n^2 - 25n - 12 + \log_2 a_n$$

$$\Leftrightarrow \log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = n^2 - 25n - 12$$

となるから, $n \geq 2$ において

$$\begin{aligned} \log_2 a_n &= \log_2 a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 - 25k - 12) \\ &= 0 + \frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) - \frac{25n(n-1)}{2} - 12(n-1) \quad (\because a_1 = 1) \\ &= \frac{1}{3}(n-1)(n^2 - 38n - 36) \end{aligned}$$

であり

$$a_n = 2^{\frac{1}{3}(n-1)(n^2-38n-36)} \quad (n \geq 2)$$

となる。これは $n=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2^{\frac{1}{3}(n-1)(n^2-38n-36)}$$

(2)

$a_1 = 1$ より, $a_n > 1$ となりうるのは $n \geq 2$ の場合である。

$$a_n > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(n-1)(n^2 - 38n - 36) > 0$$

$$\Leftrightarrow (n-1)(n^2 - 38n - 36) > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, $n \geq 2$ のとき $n-1 > 0$ となるから, $\textcircled{1}$ の不等式は

$$n^2 - 38n - 36 > 0$$

$$\Leftrightarrow n < 19 - \sqrt{397}, 19 + \sqrt{397} < n$$

となる。ここで

$$19^2 < 397 < 20^2$$

$$\Leftrightarrow 19 < \sqrt{397} < 20$$

であるから, $19 - \sqrt{397} (< 0)$ は $n \geq 2$ に反する。一方, $38 < 19 + \sqrt{397} < 39$ となるから, $a_n > 1$ となる最小の自然数 n は

$$n = 39$$

である。