

問題 1

(1)
(ア)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right) &= \left\{\frac{d}{dx}\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right)\right\}\cos\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right) \\ &= -\frac{\pi x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\left(\pi\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

となるから、 $x=\frac{\sqrt{15}}{4}$ における値は

$$-\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}\pi}{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{30}}{2}\pi$$

となる。

(答) $-\frac{\sqrt{30}}{2}\pi$

(イ)

$$f(x)=x^p$$

とおく。すると

$$f'(x)=px^{p-1}$$

となる。 $x>a$ のとき、平均値の定理より

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= f'(c) \\ \Leftrightarrow \frac{x^p-a^p}{x-a} &= pc^{p-1}\end{aligned}$$

となるような $a<c<x$ を満たす実数 c が存在する。よって、 $x\rightarrow a+0$ のとき $a<c<x$ より $c\rightarrow a+0$ であり

$$\lim_{x\rightarrow a+0}\frac{x^p-a^p}{x-a}=pa^{p-1}$$

となる。同様にして $x<a$ のとき

$$\lim_{x\rightarrow a-0}\frac{x^p-a^p}{x-a}=pa^{p-1}$$

となる。以上より

$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{x^p-a^p}{x-a}=pa^{p-1}$$

となり

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow a}\frac{x^p-a^p}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} &= \lim_{x\rightarrow a}\frac{x^p-a^p}{x-a}(\sqrt{x}+\sqrt{a}) \\ &= pa^{p-1}\cdot 2\sqrt{a} \\ &= 2pa^{p-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

である。

(答) $2pa^{p-\frac{1}{2}}$

(ウ)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{1}{(1+t)^2}dt &= \frac{d}{dx}\left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^{x^2} \\ &= \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{1+x^2}+1\right) \\ &= \frac{2x}{(1+x^2)^2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

(2)
(ア)

自然数 k について

$$k<x<k+1$$

が成り立つとする。このとき

$$\begin{aligned}\log k &< \log x < \log(k+1) \\ \Leftrightarrow \int_k^{k+1}\log k dx &< \int_k^{k+1}\log x dx < \int_k^{k+1}\log(k+1) dx \\ \Leftrightarrow \log k &< (k+1)\log(k+1)-k\log k-1 < \log(k+1) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1}\log k &< \sum_{k=1}^{n-1}\{(k+1)\log(k+1)-k\log k-1\} < \sum_{k=1}^{n-1}\log(k+1) \\ \Leftrightarrow \log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1) &< n\log n - (n-1) < \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\log 2 + \log 3 + \cdots + \log(n-1) &< n\log n - (n-1) \\ \Leftrightarrow A_n &< \log n - (n-1) \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}\end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned}n\log n - (n-1) &< \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n \\ \Leftrightarrow -(n-1) &< A_n \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}\end{aligned}$$

となる。①、②から

$$-(n-1) < A_n < \log n - (n-1) \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

であることが示された。

(証明終)

(イ)

$$S_n = \log 2 + \log 3 + \cdots + \log n$$

とおくと

$$\begin{aligned}\log 3 + \log 5 + \cdots + \log(2n-1) &= (\log 2 + \log 3 + \cdots + \log 2n) - (\log 2 + \log 4 + \cdots + \log 2n) \\ &= S_{2n} - (\log 2 \cdot 1 + \log 2 \cdot 2 + \cdots + \log 2 \cdot n) \\ &= S_{2n} - \{(\log 2 + \log 1) + (\log 2 + \log 2) + \cdots + (\log 2 + \log n)\} \\ &= S_{2n} - (S_n + n\log 2)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}&\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 9 + \log 11 + \cdots + \log(2n-1)}{\log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5 + \log 6 + \cdots + \log n} \\ &= \lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{S_{2n}-n\log 2}{S_n}-1\right)\end{aligned}$$

である。③より

$$\begin{aligned}-(2n-1) &< A_{2n} < \log 2n - (2n-1) \\ \Leftrightarrow -2n+1 &< S_{2n} - 2n\log 2n < \log 2n - 2n+1 \\ \Leftrightarrow 2n\log 2n - 2n+1 &< S_{2n} < (2n+1)\log 2n - 2n+1 \\ \Leftrightarrow 2n\log n + 2n\log 2 - 2n+1 &< S_{2n} < (2n+1)\log n + (2n+1)\log 2 - 2n+1\end{aligned}$$

となる。これと

$$n\log n - n+1 < S_n < (n+1)\log n - n+1$$

から

$$\frac{2n\log n + n\log 2 - 2n+1}{(n+1)\log n - n+1} - 1 < \frac{S_{2n} - n\log 2}{S_n} - 1 < \frac{(2n+1)\log n + (n+1)\log 2 - 2n+1}{n\log n - n+1} - 1$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow\infty}\left\{\frac{2n\log n + n\log 2 - 2n+1}{(n+1)\log n - n+1} - 1\right\} &= \lim_{n\rightarrow\infty}\left\{\frac{2+\frac{\log 2}{\log n}-\frac{2}{\log n}+\frac{1}{n\log n}}{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{n\log n}} - 1\right\} \\ &= 2-1 \\ &= 1\end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left\{\frac{(2n+1)\log n + (n+1)\log 2 - 2n+1}{n\log n - n+1} - 1\right\} = 1$$

となる。よって、はさみうちの原理から

$$\begin{aligned}&\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{S_{2n}-n\log 2}{S_n}-1 = 1 \\ \Leftrightarrow \lim_{n\rightarrow\infty}\frac{\log 3 + \log 5 + \log 7 + \log 9 + \log 11 + \cdots + \log(2n-1)}{\log 2 + \log 3 + \log 4 + \log 5 + \log 6 + \cdots + \log n} &= 1\end{aligned}$$

となる。

(答) 1

問題 2

(1)

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^{e^2} (\log x)^{n+1} dx \\ &= \left[x (\log x)^{n+1} \right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} (n+1) (\log x)^n dx \\ &= e^2 \cdot 2^{n+1} - (n+1) I_n \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad I_{n+1} = e^2 \cdot 2^{n+1} - (n+1) I_n$$

(2)

$I_{n+1} = e^2 \cdot 2^{n+1} - (n+1) I_n$ の両辺に $\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ をかけると

$$\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} I_{n+1} = \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} e^2 + \frac{(-1)^n}{n!} I_n$$

となる。

$$A_n = \frac{(-1)^n}{n!} I_n$$

とおくと

$$A_{n+1} = e^2 \cdot \frac{(-2)^{n+1}}{(n+1)!} + A_n$$

となり

$$\begin{aligned} A_0 &= I_0 \\ &= \int_1^{e^2} (\log x)^0 dx \\ &= e^2 - 1 \end{aligned}$$

であるから、 $n \geq 1$ において

$$A_n = e^2 - 1 + \sum_{k=1}^n e^2 \cdot \frac{(-2)^k}{k!}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^2 \cdot \frac{(-2)^k}{k!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^2 \left\{ \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} \right) - 1 \right\} \\ &= e^2 (e^{-2} - 1) \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-2)^k}{k!} = e^{-2} \right) \\ &= 1 - e^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_1^{e^2} (\log x)^n dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \\ &= e^2 - 1 + 1 - e^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(答) 0

問題 3

(1)

$$(A_{12})^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

より、両辺に左から A_{12} をかけて

$$\begin{aligned} A &= A_{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 3a_1+a_2 & 2a_1+a_2 \\ b_1 & b_2 & 3b_1+b_2 & 2b_1+b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから

$$A_{34} = \begin{pmatrix} 3a_1+a_2 & 2a_1+a_2 \\ 3b_1+b_2 & 2b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \Delta(A_{34}) &= (3a_1+a_2)(2b_1+b_2) - (2a_1+a_2)(3b_1+b_2) \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \Delta(A_{12}) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 &\neq 0 \end{aligned}$$

から

$$\Delta(A_{34}) \neq 0$$

となることが示された。

(証明終)

また $\Delta(A_{34}) \neq 0$ より

$$(A_{34})^{-1}A = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{pmatrix} 2b_1+b_2 & -2a_1-a_2 \\ -3b_1-b_2 & 3a_1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 3a_1+a_2 & 2a_1+a_2 \\ b_1 & b_2 & 3b_1+b_2 & 2b_1+b_2 \end{pmatrix}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{pmatrix} 2b_1+b_2 & -2a_1-a_2 \\ -3b_1-b_2 & 3a_1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{pmatrix} a_1b_2 - a_2b_1 & 2(b_1a_2 - a_1b_2) \\ -a_1b_2 + a_2b_1 & 3(-b_1a_2 + a_1b_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \begin{pmatrix} 2b_1+b_2 & -2a_1-a_2 \\ -3b_1-b_2 & 3a_1+a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3a_1+a_2 & 2a_1+a_2 \\ 3b_1+b_2 & 2b_1+b_2 \end{pmatrix} &= (A_{34})^{-1}A_{34} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であることから

$$(A_{34})^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (A_{34})^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\Delta(A_j) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_jb_j - a_jb_i = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となり

$$\Delta(A_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow a_kb_k - a_kb_i = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。② $\times b_j$ - ① $\times b_k$ から

$$b_i \cdot (a_jb_k - a_kb_j) = 0$$

となる。 $b_jb_kb_k \neq 0$ から $b_i \neq 0$ であるから

$$a_jb_k - a_kb_j = 0$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \Delta(A_{jk}) &= a_jb_k - a_kb_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

が示された。

(証明終)

(3)

$a_i = x^{i-1}, b_i = y^{4-i}$ であるとき

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ y^3 & y^2 & y & 1 \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $x > 0, y > 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \Delta(A_4) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 - x^3y^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-xy)(1+xy+x^2y^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-xy) \left\{ \left(xy + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right\} &= 0 \\ \Leftrightarrow xy &= 1 \end{aligned}$$

となる。このとき

$$\begin{aligned} \Delta(A_{12}) &= y^2 - xy^3 \\ &= y^2 - xy \cdot y^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

となり、同様にして

$$\begin{aligned} \Delta(A_{13}) &= y - x^2y^3 \\ &= y - (xy)^2 \cdot y \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで $b_1b_2b_3b_4 = y^6 \neq 0$ から(2)の結果を用いると

$$\begin{aligned} \Delta(A_{12}) = \Delta(A_{13}) = 0 &\Rightarrow \Delta(A_{23}) = 0 \\ \Delta(A_{12}) = \Delta(A_{14}) = 0 &\Rightarrow \Delta(A_{24}) = 0 \\ \Delta(A_{13}) = \Delta(A_{14}) = 0 &\Rightarrow \Delta(A_{34}) = 0 \end{aligned}$$

となる。よって題意は示された。

(証明終)