

1

(1)

$x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{5}{4}$  のもとで,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \\ &= \frac{36}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{45}{16} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_2 = \frac{36}{25}, y_2 = \frac{45}{16}$$

(2)

$n \geq 1$  において第  $n+1$  回目の操作での  $x$  軸方向,  $y$  軸方向の移動距離はそれぞれ

$x_{n+1} - x_n, y_{n+1} - y_n$  とかけることから,  $x_1 = \frac{4}{5}, y_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{36}{25}, y_2 = \frac{45}{16}$  より,  $n \geq 2$  について第

$n$  回目の操作と第  $n+1$  回目の操作の移動距離の関係から

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_n = \frac{4}{5}(x_n - x_{n-1}) \\ y_{n+1} - y_n = \frac{5}{4}(y_n - y_{n-1}) \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} x_{n+1} - x_n = \frac{4}{5}(x_n - x_{n-1}) \\ y_{n+1} - y_n = \frac{5}{4}(y_n - y_{n-1}) \end{cases}$$

(3)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} (x_2 - x_1) \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となるから,  $n \geq 2$  のとき

$$\begin{aligned} x_n &= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1} \\ &= \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}}{1 - \frac{4}{5}} \\ &= 4 - 5 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

となる。また, これは  $n=1$  においても  $x_1 = \frac{4}{5}$  を満たし, 成立する。

$$(\text{答}) \quad x_n = 4 - 5 \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

(4)

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} y_{n+1} - y_n &= \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} (y_2 - y_1) \\ &= \left(\frac{5}{4}\right)^{n+1} \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①, ②より 2 点  $P_{n-1}, P_n$  を通る直線の傾きは

$$\begin{aligned} \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} &= \frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n} \\ &= \left(\frac{25}{16}\right)^n \end{aligned}$$

であるから, 求める  $n$  の値は

$$\left(\frac{25}{16}\right)^n > 1000 \quad \dots \textcircled{3}$$

をみたす最小の整数  $n$  である。③において, 辺々底を  $10(>1)$  とする対数をとると

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{25}{16}\right)^n &> \log_{10} 1000 \\ \Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{10^2}{2^4}\right)^n &> \log_{10} 10^3 \\ \Leftrightarrow n(2 - 4\log_{10} 2) &> 3 \\ \Leftrightarrow n(2 - 4 \cdot 0.301) &> 3 \quad (\because \log_{10} 2 = 0.301) \\ \Leftrightarrow 0.194n &> 3 \\ \Leftrightarrow n &> 15.4 \dots \end{aligned}$$

となる。よって, これを満たす最小の整数  $n$  は

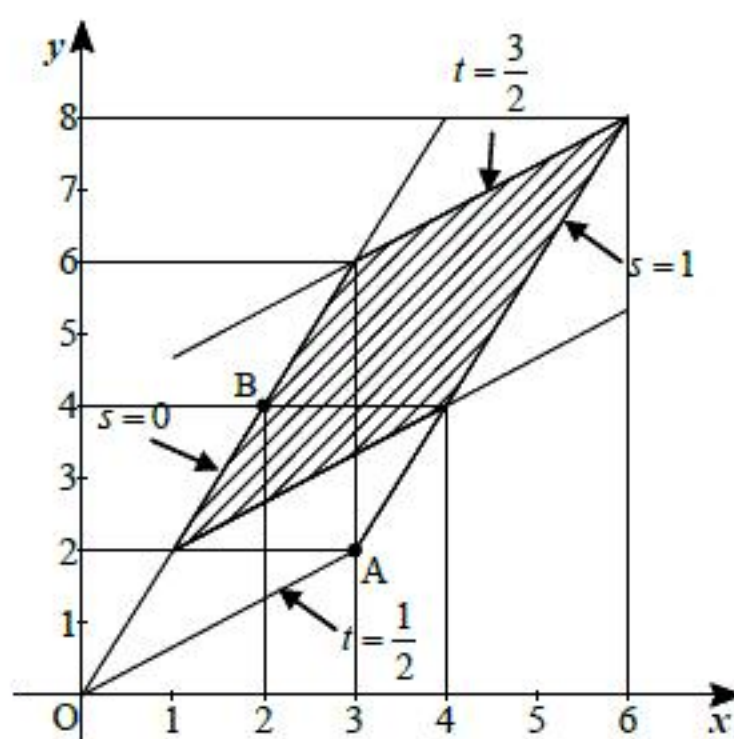
$$n = 16$$

となる。

2

(1)

求める領域は下図の斜線部分となる。(ただし、境界線を含む。)



(答) 前図の斜線部分(ただし、境界線を含む。)

(2)

$s=1-t$  かつ  $0 \leq s \leq 1, \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$  より、実数  $t$  のとり得る値の範囲は

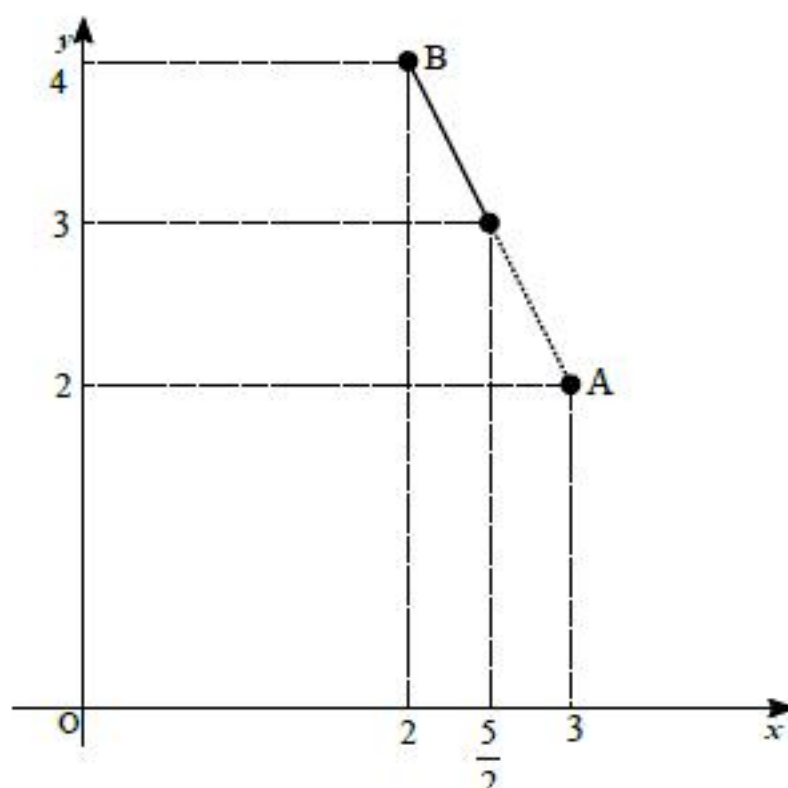
$$0 \leq 1-t \leq 1 \text{ かつ } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq t \leq 1$$

となる。このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} \\ &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

となる。よって点  $P$  の存在範囲は下図の実線部分となる。



(答) 前図の実線部分

(3)

$\overrightarrow{OA} = (3, 2), \overrightarrow{AB} = (-1, 2)$  であることから

$$\overrightarrow{OP} = (3-t, 2+2t)$$

となる。これより

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{OP}|^2 &= (3-t)^2 + (2+2t)^2 \\ &= 5t^2 + 2t + 13 \\ &= 5\left(t + \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{64}{5}\end{aligned}$$

である。 $|\overrightarrow{OP}| \geq 0$  であることより、 $|\overrightarrow{OP}|^2$  が最小となるとき  $|\overrightarrow{OP}|$  も最小となる。 $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$  のと

き、 $t = \frac{1}{2}$  で  $|\overrightarrow{OP}|^2$  は最小値  $\frac{61}{4}$  をとる。よって、 $|\overrightarrow{OP}|$  は最小値  $\frac{\sqrt{61}}{2}$  をとり、このときの点  $P$  の

座標は  $\left(\frac{5}{2}, 3\right)$  となる。

(答)  $P\left(\frac{5}{2}, 3\right), |\overrightarrow{OP}| = \frac{\sqrt{61}}{2}$



3

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-a)(x-b)-c^2 \\ &= x^2-(a+b)x+ab-c^2 \end{aligned}$$

であり, 2 次方程式  $f(x)=0$  の判別式を  $D_1$  とすると

$$\begin{aligned} D_1 &= (a+b)^2 - 4(ab-c^2) \\ &= (a-b)^2 + 4c^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となり, 等号は  $a=b$  かつ  $c=0$  のとき成立するから, 2 次方程式  $f(x)=0$  の判別式は, 0 または正であることが示された。

(証明終)

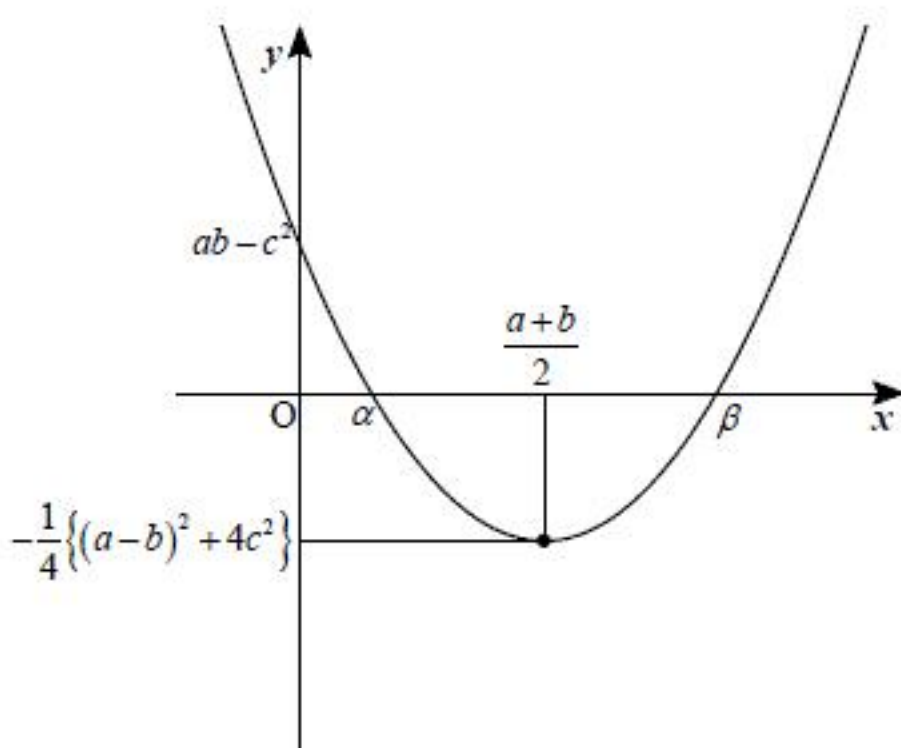
(2)

2 次方程式  $f(x)=0$  の 2 つの解を  $\alpha, \beta$  とすると, これらは  $y=f(x)$  のグラフと  $x$  軸との交点の  $x$  座標にあたる。

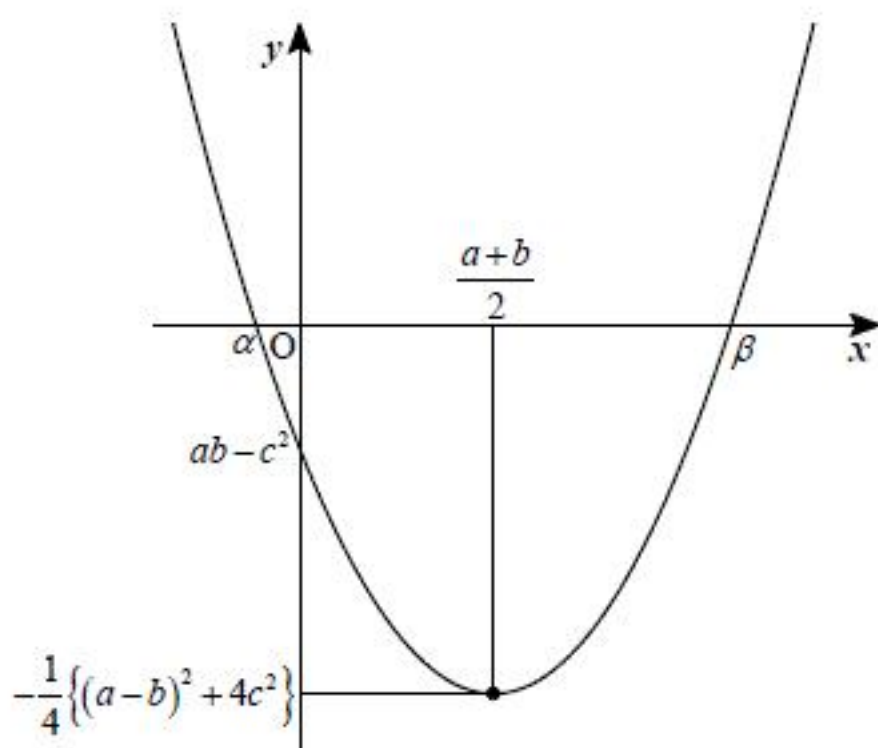
$$f(x) = \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\{(a-b)^2 + 4c^2\}$$

となるから, 求めるグラフは

[1]  $ab \geq c^2$  のとき



[2]  $ab < c^2$  のとき



となる。ただし,  $a=b$  かつ  $c=0$  のときは  $y=f(x)$  のグラフと  $x$  軸が接し, その接点の  $x$  座標は  $\alpha(=\beta)$  となる。

(答) 前図

(3)

$f(k) \leq 0$  となる実数  $k$  は  $y=f(x)$  のグラフにおいて  $y \leq 0$  となるような  $x$  座標にあたる。よって, グラフより

$$\alpha \leq k \leq \beta$$

となる。

(答)  $\alpha \leq k \leq \beta$

(4)

$$\begin{aligned} k(t^2+1) &= at^2+2ct+b \\ \Leftrightarrow (k-a)t^2-2ct+k-b &= 0 \end{aligned}$$

となる。これが  $t$  についての 2 次方程式であるとき,  $k \neq a$  である。この方程式が実数解をもつとき, 判別式を  $D_2$  とすると

$$\begin{aligned} D_2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow c^2 - (k-a)(k-b) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow f(k) &\leq 0 \end{aligned}$$

となる。よって, (3)の結果を用いて

$$\alpha \leq k \leq \beta$$

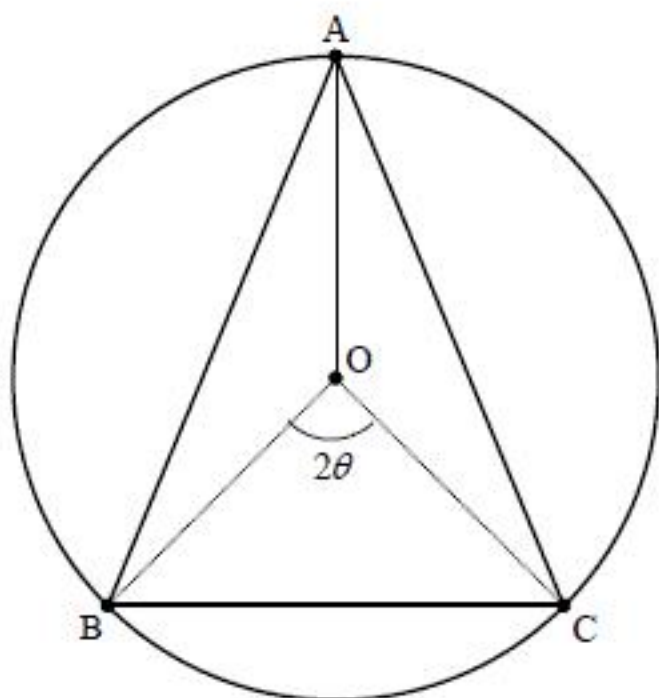
となることが示された。

(証明終)



4

(1)

[1]  $\angle BAC$  が鋭角のとき

円周角と中心角の関係より

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \frac{1}{2} \angle BOC \\ &= \theta\end{aligned}$$

となる。また、三角形  $ABC$  が  $AB = AC$  の二等辺三角形であることから

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi - \theta}{2}$$

となる。さらに、三角形  $ABC$  の外接円の半径が1であることから、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{CA}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}AB &= 2 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \\ &= 2 \cos \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

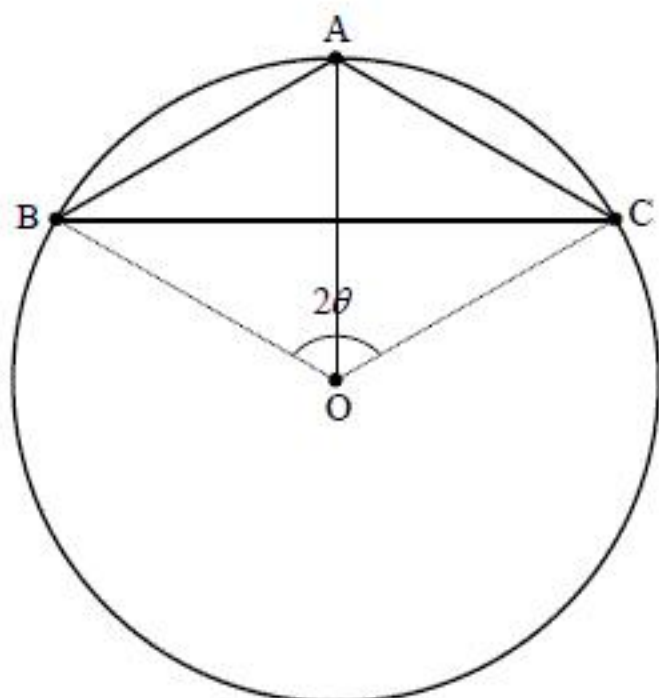
$$BC = 2 \sin \theta$$

$$CA = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

となる。よって、三角形  $ABC$  の周の長さ  $l$  は

$$l = 2 \sin \theta + 4 \cos \frac{\theta}{2}$$

となる。

[2]  $\angle BAC$  が鈍角のとき

円周角と中心角の関係より

$$\begin{aligned}\angle BAC &= \frac{1}{2} (2\pi - \angle BOC) \\ &= \pi - \theta\end{aligned}$$

となる。また、三角形  $ABC$  が  $AB = AC$  の二等辺三角形であることから

$$\angle ABC = \angle ACB = \frac{\theta}{2}$$

となる。さらに、三角形  $ABC$  の外接円の半径が1であることから、正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{CA}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2$$

となる。以上より

$$AB = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned}BC &= 2 \sin (\pi - \theta) \\ &= 2 \sin \theta\end{aligned}$$

$$CA = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

となる。よって、三角形  $ABC$  の周の長さ  $l$  は

$$l = 2 \sin \theta + 4 \sin \frac{\theta}{2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \angle BAC \text{ が鋭角のとき} \quad l = 2 \sin \theta + 4 \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\angle BAC \text{ が鈍角のとき} \quad l = 2 \sin \theta + 4 \sin \frac{\theta}{2}$$

(2)

[1]  $\angle BAC$  が鋭角のとき

$$f(\theta) = 2 \sin \theta + 4 \cos \frac{\theta}{2} \quad \left( 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

より

$$\begin{aligned}f'(\theta) &= 2 \cos \theta - 2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) - 2 \sin \frac{\theta}{2} \\ &= -2 \left( 2 \sin \frac{\theta}{2} - 1 \right) \left( \sin \frac{\theta}{2} + 1 \right)\end{aligned}$$

となるから、関数  $f(\theta)$  の増減表は以下のようになる。

| $\theta$     | 0          | ...        | $\frac{\pi}{3}$ | ...        | $\frac{\pi}{2}$ |
|--------------|------------|------------|-----------------|------------|-----------------|
| $f'(\theta)$ | $\nearrow$ | +          | 0               | -          | $\searrow$      |
| $f(\theta)$  | $\nearrow$ | $\nearrow$ | 極大              | $\searrow$ | $\searrow$      |

よって、 $f(\theta)$  は

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3}$$

をとる。

[2]  $\angle BAC$  が鈍角のとき

$$f(\theta) = 2 \sin \theta + 4 \sin \frac{\theta}{2} \quad \left( 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

より

$$\begin{aligned}f'(\theta) &= 2 \cos \theta + 2 \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \left( 2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) + 2 \cos \frac{\theta}{2} \\ &= 2 \left( 2 \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) \left( \cos \frac{\theta}{2} + 1 \right)\end{aligned}$$

となるから、関数  $f(\theta)$  の増減表は以下のようになる。

| $\theta$     | 0          | ...        | $\frac{\pi}{2}$ |
|--------------|------------|------------|-----------------|
| $f'(\theta)$ | $\nearrow$ | +          | $\nearrow$      |
| $f(\theta)$  | $\nearrow$ | $\nearrow$ | $\nearrow$      |

よって、 $f(\theta)$  は最大値をとらない。

$$(\text{答}) \quad \angle BAC \text{ が鋭角のとき} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } l = 3\sqrt{3}$$

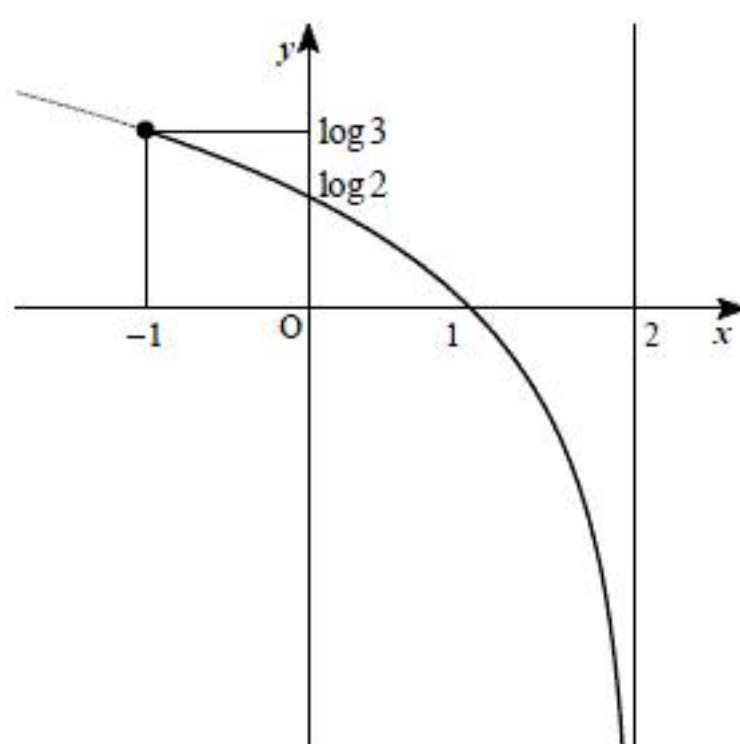
$$\angle BAC \text{ が鈍角のとき} \quad \text{最大値なし}$$



5

(1)

曲線  $y = \log(2-x) (= f(x))$  は曲線  $y = \log x$  を  $y$  軸に関して対称移動させたものを  $x$  軸正方向に 2 だけ平行移動したものであるから、グラフは  $-1 \leq x < 2$  において下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$$f'(x) = -\frac{1}{2-x}$$

より、点  $(t, f(t))$  における曲線  $y = f(x)$  の接線  $l$  の方程式は

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2-t}(x-t) + \log(2-t) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{t-2}x + \frac{t}{2-t} + \log(2-t) \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad y = \frac{1}{t-2}x + \frac{t}{2-t} + \log(2-t)$$

(3)

直線  $l$  と直線  $x=1, -1$  との交点をそれぞれ  $A, B$  とし、また、 $C(1, 0), D(-1, 0)$  とすると、面積  $S$  は台形  $ACDB$  の面積から  $\int_{-1}^1 \log(2-x) dx$  を引いた値に等しい。よって

$$S = \frac{1}{2} \left[ \left\{ -\frac{1}{2-t}(1-t) + \log(2-t) \right\} + \left\{ -\frac{1}{2-t}(-1-t) + \log(2-t) \right\} \right] \cdot 2 - \int_{-1}^1 \log(2-x) dx$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \log(2-x) dx &= -[(2-x)\log(2-x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 dx \\ &= 3\log 3 - 2 \end{aligned}$$

であるから

$$S = \frac{2t}{2-t} + 2\log(2-t) - 3\log 3 + 2$$

となる。これを  $S(t)$  とおくと

$$\begin{aligned} S'(t) &= \frac{2(2-t) - (-1) \cdot 2t}{(2-t)^2} - \frac{2}{2-t} \\ &= \frac{2t}{(2-t)^2} \end{aligned}$$

となる。よって  $S(t)$  の増減表は下のようになる。

|         |    |     |    |     |   |
|---------|----|-----|----|-----|---|
| $t$     | -1 | ... | 0  | ... | 1 |
| $S'(t)$ |    | -   |    | +   |   |
| $S(t)$  |    | ↘   | 極小 | ↗   |   |

よって  $S$  は  $t=0$  のとき最小値をとり、その値は

$$S(0) = 2\log 2 - 3\log 3 + 2$$

となる。

$$(答) \quad S = \frac{2t}{2-t} + 2\log(2-t) - 3\log 3 + 2, \quad t=0 \text{ のとき最小値 } 2\log 2 - 3\log 3 + 2$$

6

(1)

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より  $\tan \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow (2 \tan \theta - 1)(\tan \theta + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。さらに、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より、 $\cos \theta > 0$ ,  $\sin \theta > 0$  であるから

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \theta + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \tan \theta = \frac{1}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}\det P &= \cos \theta \cdot \cos \theta - (-\sin \theta) \cdot \sin \theta \\ &= 1 \\ &\neq 0\end{aligned}$$

であるから、 $P^{-1}$  が存在する。 $AP = PB$  の両辺に左側から  $P^{-1}$  をかけると

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= P^{-1}PB \\ &= B\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}B &= P^{-1}AP \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

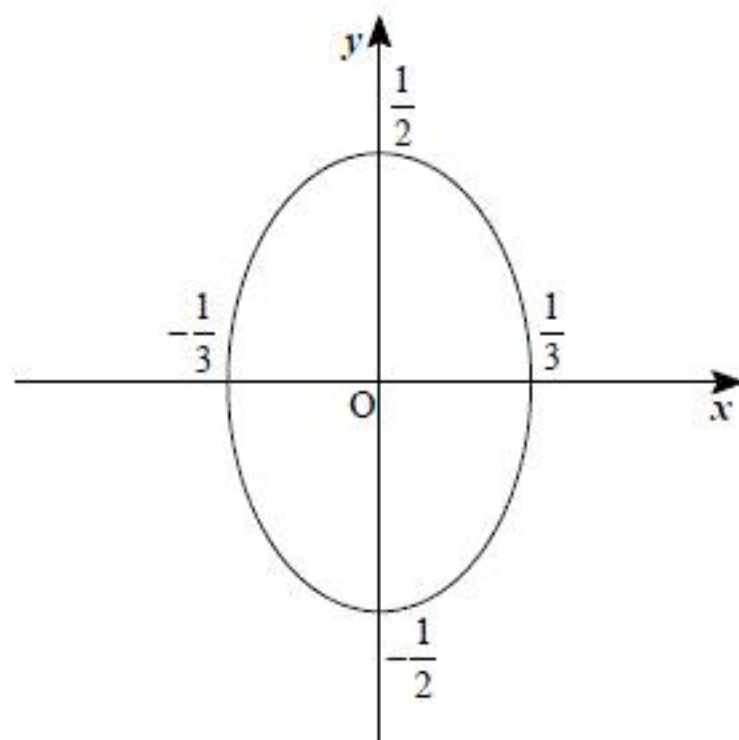
(3)

$$\begin{aligned}(x \ y)B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (x \ y) \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 9x^2 + 4y^2\end{aligned}$$

となる。また曲線  $(x \ y)B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$  は

$$9x^2 + 4y^2 = 1$$

を表すため、この曲線は楕円を示し、概形は下図のようになる。



$$(\text{答}) \quad (x \ y)B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 9x^2 + 4y^2, \text{ 前図}$$