

問題 1

(1)

$0 < \alpha < \frac{\pi}{4}, 0 < \beta < \frac{\pi}{4}$ のとき,

$0 < \tan \alpha < 1, 0 < \tan \beta < 1$

なので,

$\tan \alpha + \tan \beta > 0, 0 < \tan \alpha \tan \beta < 1$

が成り立つ。よって,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} > \tan \alpha + \tan \beta$$

が成り立つ。($\because \tan \alpha + \tan \beta > 0, 0 < 1 - \tan \alpha \tan \beta < 1$)

(証明終)

(2)

$$a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{1}{n!(n+1)!}, a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!(n+2)!}$$

第 2 式を第 1 式で割ると,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{n!(n+1)!}{(n+1)!(n+2)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

$a_1 = \frac{1}{2}$ を考慮すると, $a_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad (n \geq 1)$ となる。よって,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right\} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

(答) $S_n = \frac{n}{n+1}$

(3)

真数条件から,

$0 < 1+x, 0 < 1-x$

$\Leftrightarrow -1 < x < 1$

このもとで, 与式を変形すると

$2 - \log_y(1+x) < \log_y(1-x)$

$\Leftrightarrow 2 < \log_y(1-x) + \log_y(1+x)$

$\Leftrightarrow \log_y y^2 < \log_y(1-x^2)$

(i) $0 < y < 1$ のとき

$y^2 > 1-x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 > 1$

(ii) $1 < y$ のとき

$y^2 < 1-x^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 < 1$

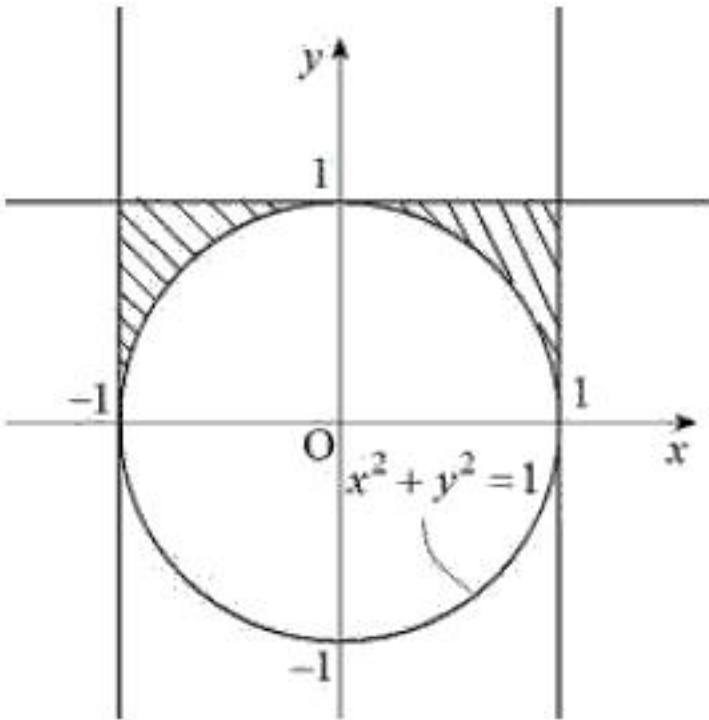
これを満たす領域は存在しない。

以上より, 求める領域は

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ -1 < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

を満たす領域である。この領域を図示すると, 次図斜線部のようになる。
(境界はすべて除く)

(答)



問題 2

(1)

$f(x)=x^2$ とおくと $f'(x)=2x$ なので、放物線 C の点 A における接線の式は

$$\begin{aligned} y &= f'(2)(x-2)+4 \\ &= 4(x-2)+4 \\ &= 4x-4 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

この接線に垂直で、点 B を通る直線の式は

$$y = -\frac{1}{4}(x-2) \quad \cdots \textcircled{2}$$

$AP \perp BP$ なので、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の交点が P である。

$$\begin{aligned} 4x-4 &= -\frac{1}{4}(x-2) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{18}{17} \end{aligned}$$

このとき

$$\begin{aligned} y &= 4 \cdot \frac{18}{17} - 4 \\ &= \frac{4}{17} \end{aligned}$$

ゆえに、 $P\left(\frac{18}{17}, \frac{4}{17}\right)$

また、

$$r = BP = \sqrt{\left(\frac{18}{17}-2\right)^2 + \left(\frac{4}{17}\right)^2} = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

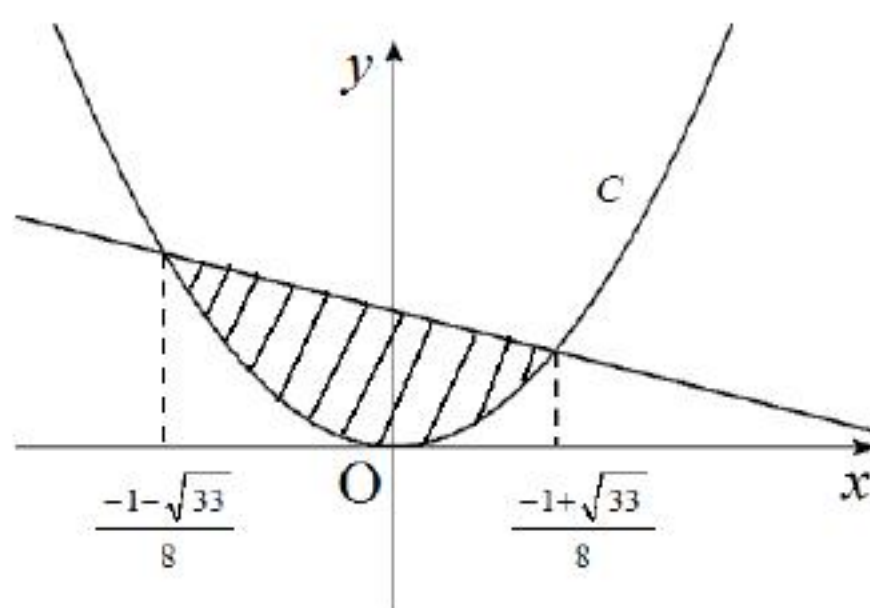
$$(\text{答}) \quad P:\left(\frac{18}{17}, \frac{4}{17}\right), \quad r = \frac{4\sqrt{17}}{17}$$

(2)

$BP: y = -\frac{1}{4}(x-2)$ と放物線 C の交点の x 座標を求める。

$$\begin{aligned} x^2 &= -\frac{1}{4}(x-2) \\ \Leftrightarrow 4x^2 + x - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8} \end{aligned}$$

よってグラフは次図のようになる。(斜線部は面積を求める部分)



したがって $\frac{-1-\sqrt{33}}{8} = \alpha$, $\frac{-1+\sqrt{33}}{8} = \beta$ とおくと、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \left\{ -\frac{1}{4}(x-2) - x^2 \right\} dx &= -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\beta)(x-\alpha) dx \\ &= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{\sqrt{33}}{4} \right)^3 \\ &= \frac{11\sqrt{33}}{128} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{11\sqrt{33}}{128}$$

問題 3

(1)

$\angle AOB$ は三角形の 1 つの角なので $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$ である。 $\therefore -1 < \cos \angle AOB < 1$

$$\begin{aligned} u &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \\ &= |\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}| \cos \angle AOB \\ &= 2 \cos \angle AOB \end{aligned}$$

と合わせて、 $-2 < u < 2$ であることが示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OT} &= s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OB} \\ &= 2s \overrightarrow{OP} + 2t \overrightarrow{OQ} \end{aligned}$$

であるから、点 T が $\triangle OPQ$ の内部にあるための条件は、

$$2s > 0, 2t > 0, 2s + 2t < 1$$

$$\therefore s > 0, t > 0, s + t < \frac{1}{2}$$

(答) $s > 0, t > 0, s + t < \frac{1}{2}$

(3)

題意より $AH \perp OB, BH \perp OA$ なので、 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$ である。

$\overrightarrow{OH} = x \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB}$ とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{ (x-1) \overrightarrow{OA} + y \overrightarrow{OB} \} \cdot \overrightarrow{OB} &= 0 \\ \Leftrightarrow u(x-1) + 4y &= 0 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{ x \overrightarrow{OA} + (y-1) \overrightarrow{OB} \} \cdot \overrightarrow{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow x + u(y-1) &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②を連立して解くと、

$$x = \frac{u(4-u)}{4-u^2}, y = \frac{u(1-u)}{4-u^2} \quad (\because -2 < u < 2)$$

となる。したがって

$$\overrightarrow{OH} = \frac{u(4-u)}{4-u^2} \overrightarrow{OA} + \frac{u(1-u)}{4-u^2} \overrightarrow{OB}$$

(証明終)

(4)

(2), (3)より、 u の満たすべき条件は次の 3 式である。

$$\frac{u(4-u)}{4-u^2} > 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

$$\frac{u(1-u)}{4-u^2} > 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$\frac{u(4-u)}{4-u^2} + \frac{u(1-u)}{4-u^2} < \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{5}$$

(1)より $4-u^2 > 0$ であることを考慮すると、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow u(4-u) > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < u < 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} &\Leftrightarrow u(1-u) > 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < u < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} &\Leftrightarrow 2u(4-u) + 2u(1-u) < 4-u^2 \\ &\Leftrightarrow 3u^2 - 10u + 4 > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{5-\sqrt{13}}{3} < u < \frac{5+\sqrt{13}}{3} \end{aligned}$$

$-2 < u < 2$ とあわせて、求める u の範囲は

$$\frac{5-\sqrt{13}}{3} < u < 1$$

(答) $\frac{5-\sqrt{13}}{3} < u < 1$