

問題 1

(1)
(ア)

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = 2e^{x^2} + 2x \cdot 2xe^{x^2} = 2(1+2x^2)e^{x^2}$$

$$(答) \quad f'(x) = 2xe^{x^2}, f''(x) = 2(1+2x^2)e^{x^2}$$

(イ)
(ア)の結果を用いると,

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x^2 + 3x + 1)e^{x^2} dx &= \left[xe^{x^2} + \frac{3}{2}e^{x^2} \right]_0^2 \\ &= 2e^4 + \frac{3}{2}e^4 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{7}{2}e^4 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(答) \quad \frac{7}{2}e^4 - \frac{3}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^n} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{1}{x^{n-2}} \right\} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{n-2}} \end{aligned}$$

これが0でない実数になるのは $n=2$ の時のみである。

$$(答) \quad n=2$$

(3)

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ から計算すると,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1+ab & 2a \\ 2b & 1+ab \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1+3ab & a(3+ab) \\ b(3+ab) & 1+3ab \end{pmatrix}$$

よって, (1,2)要素をみると $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるには $a=0$ または $ab=-3$ が必要。

しかし, いずれの場合も (1,1)要素は $1+3ab \neq 0$ となるため,

どのような実数 a, b に対しても $A^3 \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となることが示された。

(証明終)

問題 2

(1)
部分積分を用いて、

$$\int_0^1 x(e^x - 2ka) \, dx = [xe^x - kax^2]_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx$$
$$= 1 - ka$$

(答) $1 - ka$

(2)
 $\int_0^1 f(t) \, dt$ は定数なので、 $a = \int_0^1 f(t) \, dt$ とおける。

すると、 $f(x) = x(e^x - 2ka)$ となるので、(1)の答を用いると

$$a = \int_0^1 f(t) \, dt = 1 - ka$$

これを解くと、 $k + 1 > 0$ より、

$$a = \frac{1}{k + 1}$$

なので、

$$f(x) = xe^x - \frac{2k}{k + 1}x$$

(答) $f(x) = xe^x - \frac{2k}{k + 1}x$

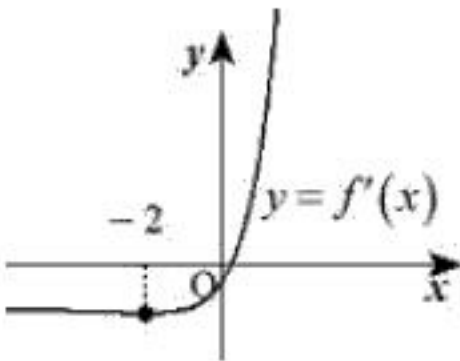
(3)
 $f'(x) = (x + 1)e^x - \frac{2k}{k + 1}$
 $f''(x) = (x + 2)e^x$

よって、 $f'(x)$ の増減表は次のようになる。

x	...	-2	...
$f''(x)$	-	0	+
$f'(x)$	$\searrow$	$\frac{-1}{e^2} - \frac{2k}{k + 1}$	$\nearrow$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\frac{2k}{k + 1} < 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \infty \end{cases}$$

以上より、 $f'(x) = 0$ となる x は 1 つだけ存在することが分かる。
また、その点で $f'(x)$ の符号が変わるので、極値がただ 1 つ存在することが示された。
(証明終)



(4)
 $f(x)$ の極値を与える x を p とすると、 $f'(p) = 0$ より

$$(p + 1)e^p = \frac{2k}{k + 1} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。これを用いると、

$$\begin{aligned} f(p) &= pe^p - \frac{2k}{k + 1}p \\ &= pe^p - p(p + 1)e^p \\ &= -p^2e^p \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f(p) = 0$ となるのは $p = 0$ のときである。

①より、求める k の値は、

$$1 = \frac{2k}{k + 1}$$

を解いて

$$k = 1$$

(答) $k = 1$

問題 3

(1)

$x^2 - y^2 = 1$ に $y = kx + 2$ を代入して整理すると,

$$(1 - k^2)x^2 - 4kx - 5 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

これが x について異なる 2 つの実数解を持てば良いので、
判別式を D とすると、求める条件は

$$1 - k^2 \neq 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{D}{4} = 4k^2 + 5(1 - k^2) > 0$$

これを解いて,

$$k \neq \pm 1 \quad \text{かつ} \quad -\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$$

$$(\text{答}) \quad k \neq \pm 1 \quad \text{かつ} \quad -\sqrt{5} < k < \sqrt{5}$$

(2)

(ア)

P, Q の x 座標を p, q とすると、それらは①の 2 解であり、解と係数の関係から、

$$p + q = \frac{4k}{1 - k^2} \quad (\because k \neq \pm 1)$$

R は P, Q の中点であり、 $y = kx + 2$ 上にあるので、

$$X = \frac{p + q}{2} = \frac{2k}{1 - k^2}$$

$$Y = kX + 2 = \frac{2}{1 - k^2}$$

$$(\text{答}) \quad (X, Y) = \left(\frac{2k}{1 - k^2}, \frac{2}{1 - k^2} \right)$$

(イ)

$$Y = \frac{2}{1 - k^2} \neq 0 \quad \text{より、(ア)の答から}$$

$$k = \frac{X}{Y}$$

と書ける。 $\frac{2}{1 - k^2} = Y$ に $k = \frac{X}{Y}$ を代入して整理すると、

$$\frac{2}{1 - \frac{X^2}{Y^2}} = Y$$

$$X^2 - (Y - 1)^2 = -1$$

が得られる。したがって、求める曲線 C の方程式は、

$$x^2 - (y - 1)^2 = -1$$

$$(\text{答}) \quad x^2 - (y - 1)^2 = -1$$