

1

(1)

$2^x > 0, 2^{-x} > 0$ なので、相加・相乗平均の関係を用いて、

$$t = 2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2 \quad (\text{等号成立は } 2^x = 2^{-x} \text{ 即ち, } x=0 \text{ のとき})$$

が成り立つ。最大値は存在しないので、求める t の値の範囲は

$$2 \leq t$$

(答) $2 \leq t$

(2)

$$t^2 = (2^x + 2^{-x})^2 = 4^x + 4^{-x} + 2 \Leftrightarrow 4^x + 4^{-x} = t^2 - 2$$

よって、与方程式を t で表して解くと、

$$2(t^2 - 2) - 7t + 9 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 7t + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2t - 5)(t - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{2} \quad (\because 2 \leq t)$$

このことから、

$$2^x + 2^{-x} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (2^x)^2 + 1 = \frac{5}{2} \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 2(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2}, 2$$

$$\Leftrightarrow x = -1, 1$$

(答) $x = -1, 1$

(3)

2倍角の公式より、

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 3\cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\cos x - 2) = 0$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ なので、

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$-\pi \leq x \leq \pi$ なので、

$$x = \frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi$$

(答) $x = \frac{2}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi$

(4)

$$(\text{与式}) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - a \leq 3\cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\cos x - 2 \leq a$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\cos x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} \leq a$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ なので、左辺は $\cos x = -1$ のとき最大値3をとる。

ゆえに、 $3 \leq a$ とすれば与式は常に成立する。

(答) $3 \leq a$

2

(1)

点P, Qはそれぞれ $y = \frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{x}$ 上の点なので,

$$p_y = \frac{1}{p}, q_y = -\frac{1}{q_x} \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。さらに, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ なので,

$$pq_x + p_y q_y = 0$$

となる。これに①式を代入して,

$$pq_x - \frac{1}{pq_x} = 0 \Leftrightarrow (pq_x)^2 = 1$$

ゆえに, $q_x < 0 < p_x$ に注意して

$$pq_x = -1 \Leftrightarrow q_x = -\frac{1}{p}$$

このことから,

$$q_y = -\frac{1}{q_x} = p$$

$$(\text{答}) \quad q_x = -\frac{1}{p}, q_y = p$$

(2)

RはPQの中点なので, (1)の答を用いて

$$(r, s) = \left(\frac{p_x + q_x}{2}, \frac{p_y + q_y}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \left(p - \frac{1}{p} \right), \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) \right)$$

ゆえに,

$$r + s = p, \quad r - s = -\frac{1}{p}$$

2式を辺々かけて,

$$r^2 - s^2 = -1 \Leftrightarrow s^2 = r^2 + 1$$

$p > 0$ なので, $s = \frac{1}{2} \left(p + \frac{1}{p} \right) > 0$ となるから,

$$s = \sqrt{r^2 + 1}$$

$$(\text{答}) \quad s = \sqrt{r^2 + 1}$$

(3)

$P\left(p, \frac{1}{p}\right), Q\left(-\frac{1}{p}, p\right)$ なので,

$$S = \frac{1}{2} \left| p \cdot p - \frac{1}{p} \cdot \left(-\frac{1}{p}\right) \right| = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{1}{p^2} \right)$$

相加・相乗平均の関係より,

$$S \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \sqrt{p^2 \cdot \frac{1}{p^2}} = 1 \quad (\text{等号成立は } p^2 = \frac{1}{p^2} \Leftrightarrow p = 1 \text{ のとき})$$

(答) Sの最小値 1, そのときのpの値 1

3

(1)

l_2 の傾きは1であり、点 $A\left(a, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}\right)$ を通るので、その方程式は

$$\begin{aligned} y &= (x-a) - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2} \\ &= x - \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad y = x - \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2}$$

(2)

点 B は l_2 と放物線の交点のうち、 A でない方の点である。

よって、 l_2 と放物線の式を連立させて解くと、

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} &= x - \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x-a)(x+a+2) &= 0 \end{aligned}$$

これより、 B の x 座標は $-a-2$ であり、 y 座標は

$$(-a-2) - \frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}a^2 - 2a - \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad B\left(-a-2, -\frac{1}{2}a^2 - 2a - \frac{1}{2}\right)$$

(3)

点 E は y 軸上の点なので、

$$E\left(0, -\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2}\right)$$

従って、点と直線との距離の公式より E と l_1 との距離は

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \right| &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \right) \\ \left(\because -\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} &= -\frac{1}{2}(a+1)^2 + 2 > 0 \quad (-1 < a < 1) \right) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \right)$$

(4)

(3)より、

$$AD = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \right)$$

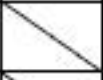
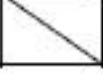
また、 l_2 の傾きは1だから

$$AB = \sqrt{2} \times |a - (-a-2)| = 2\sqrt{2}(a+1) \quad (\because -1 < a < 1)$$

ゆえに、長方形 $ABCD$ の面積を $S(a)$ とすると、

$$\begin{aligned} S(a) &= AB \cdot AD \\ &= 2(a+1) \left(-\frac{1}{2}a^2 - a + \frac{3}{2} \right) \\ &= -a^3 - 3a^2 + a + 3 \\ S'(a) &= 0 \Leftrightarrow -3a^2 - 6a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow a = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

よって、 $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	-1	...	$\frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$	...	1
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$			極大値		

これより、 $S(a)$ が最大となる a の値は

$$a = \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$$

$$(\text{答}) \quad a = \frac{-3+2\sqrt{3}}{3}$$

(1)

問題文で与えられた条件より,

$$\overline{OP} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\begin{aligned}\overline{OQ} &= \overline{OA} + \left(\cos \left(-\frac{\pi}{2} - \theta \right), \sin \left(-\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right) \\ &= (1 - \sin \theta, -\cos \theta)\end{aligned}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned}f(\theta) &= |-\overline{OP} + \overline{OQ}|^2 \\ &= (1 - \sin \theta - \cos \theta)^2 + (-\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= 4 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta + 3 \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\ &\quad (\text{答}) \quad f(\theta) = 4 \sin \theta \cos \theta - 2 \sin \theta - 2 \cos \theta + 3\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}f'(\theta) &= 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta - 2 \cos \theta + 2 \sin \theta \\ &= 2(\cos \theta - \sin \theta)(2 \cos \theta + 2 \sin \theta - 1)\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 0 \\ &\quad (\text{答}) \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0\end{aligned}$$

(3)

三角関数の合成公式より,

$$f'(\theta) = 2\sqrt{2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \left\{ 2\sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right\}$$

ここで, $\cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ を満たす θ を α $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3}{4}\pi \right)$ とおくと, $f(\theta)$ の増減表は次のようになる。

θ	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	α	...	π
$f'(\theta)$		+	0	-	0	+	
$f(\theta)$		↗	極大値	↘	極小値	↗	

増減表より, $f(\theta)$ は $\theta = \alpha$ で極小となるので, 求める条件は

$$\cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \quad \cos \theta + \sin \theta = \frac{1}{2}$$

(1)

点 P の x 座標を p とおき, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdots \textcircled{1}$, $g(x) = \log x^a = a \log x \cdots \textcircled{2}$

とおく。 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は点 P で共通の接線を持つから,

$$\begin{aligned} f'(p) = g'(p) &\Leftrightarrow p = \frac{a}{p} \\ &\Leftrightarrow p = \sqrt{a} \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

なお, このことから $a > 0$ である。さらに,

$$\begin{aligned} f(p) = g(p) &\Leftrightarrow \frac{1}{2}p^2 = a \log p \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a \log a \\ &\Leftrightarrow \log a = 1 \quad (\because a > 0) \\ &\Leftrightarrow a = e \end{aligned}$$

(答) $a = e$

(2)

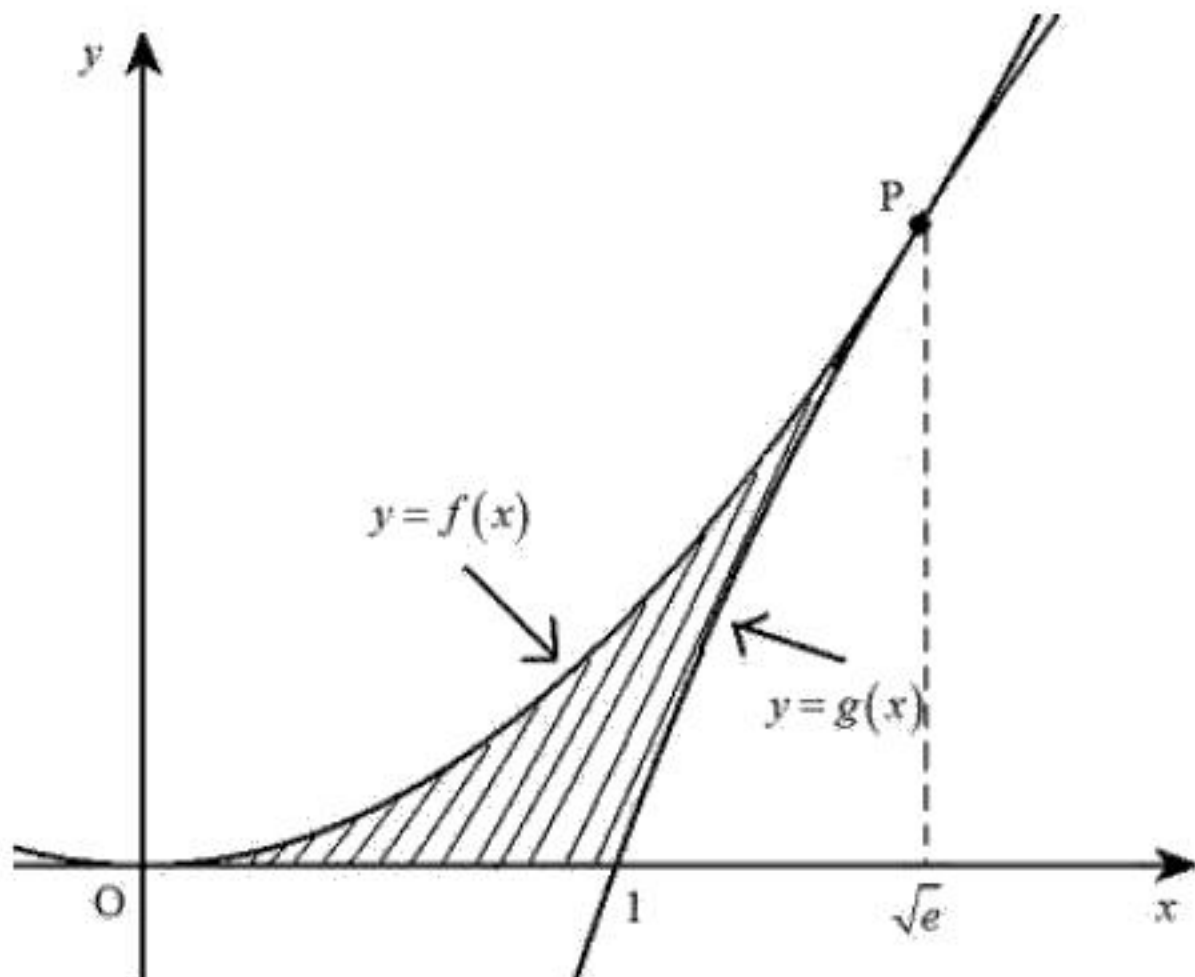
$f'(p) = p$ なので, 求める接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= p(x - p) + \frac{p^2}{2} \\ &= \sqrt{e}x - \frac{1}{2}e \end{aligned}$$

(答) $y = \sqrt{e}x - \frac{1}{2}e$

(3)

グラフの斜線部分を x 軸まわりに回転させた立体の体積が V である。



$$V = \int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \pi dx - \int_1^{\sqrt{e}} (e \log x)^2 \pi dx$$

ここで,

$$\int_0^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \pi dx = \left[\frac{1}{20}x^5 \right]_0^{\sqrt{e}} \pi = \frac{e^2 \sqrt{e}}{20} \pi$$

また, 部分積分を用いれば

$$\begin{aligned} \int (\log x)^2 dx &= \int x' (\log x)^2 dx \\ &= x (\log x)^2 - \int x \cdot 2 \log x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x (\log x)^2 - 2 \int x' \log x dx \\ &= x (\log x)^2 - 2x \log x + 2 \int x \cdot \frac{1}{x} dx + C \\ &= x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{e}} (e \log x)^2 \pi dx &= e^2 \pi \cdot \left[x (\log x)^2 - 2x \log x + 2x \right]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \left(\frac{5}{4} \sqrt{e} - 2 \right) e^2 \pi \end{aligned}$$

以上より,

$$\begin{aligned} V &= \frac{e^2 \sqrt{e}}{20} \pi - \left(\frac{5}{4} \sqrt{e} - 2 \right) e^2 \pi \\ &= \left(2 - \frac{6}{5} \sqrt{e} \right) e^2 \pi \end{aligned}$$

(答) $V = \left(2 - \frac{6}{5} \sqrt{e} \right) e^2 \pi$

(1)

ケーリー・ハミルトンの定理より,

$$A^2 - (1+1)A + \left(1 \cdot 1 - \frac{1}{a} \cdot a\right)E = A^2 - 2A = O$$

ゆえに,

$$A^2 = 2A$$

が成り立つので, 題意は示された。 (証明終)

(答) $r=2$

(2)

(1)で得られた式

$$A^2 = 2A$$

を繰り返し用いれば,

$$A^n = 2A^{n-1} = 2^2 A^{n-2} = \dots = 2^{n-1} A = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

$$(答) A^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a} \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$AX = kX$ の左から A をかけると

$$A^2 X = kAX \Leftrightarrow 2AX = kAX$$

題意より, $kX \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ なので $AX \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることを考慮すると, $k=2$ である。

このとき,

$$\begin{aligned} AX = 2X &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} p + \frac{1}{a}q \\ ap + q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p \\ 2q \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow q = ap \end{aligned}$$

(答) $k=2, q=ap$

(4)

$a=2, p=1$ のとき, $q=ap=2$

よって, (2)と(3)の結果を用いて

$$A^n X = 2^{n-1} AX = 2^n X = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(答) A^n X = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$