

問題 1

(1)

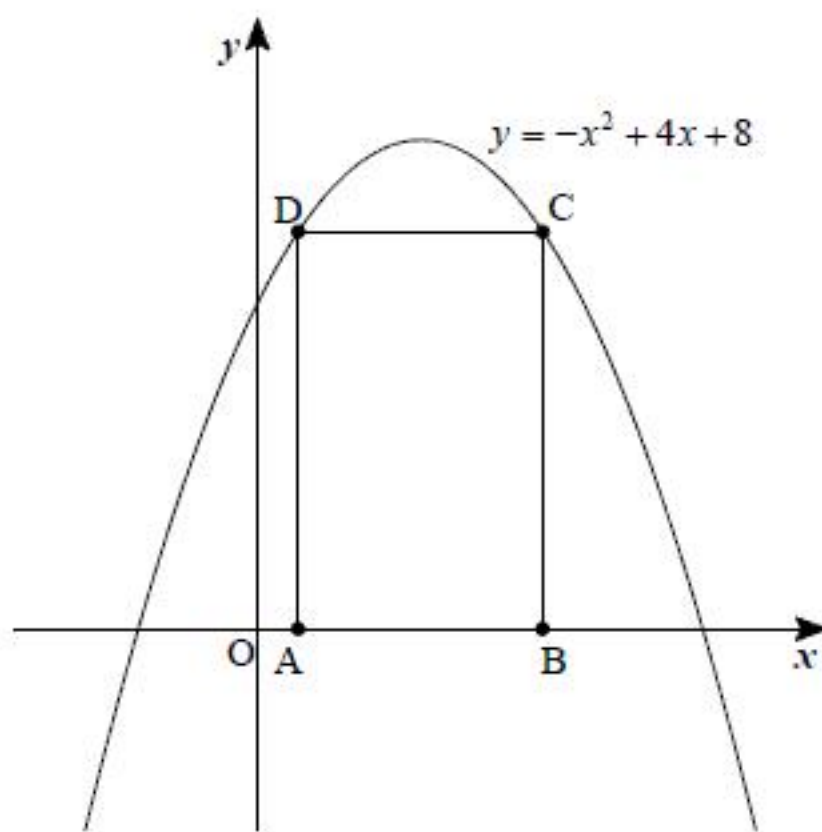
$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ &= \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq \theta \leq \pi$ なので

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

(答) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(2)



上図のような長方形 ABCD を考える。

$A(a, 0), B(b, 0)$ ($a < b$) とおくと、 C, D はいずれも $y = -x^2 + 4x + 8$ 上にあるので、

座標はそれぞれ、 $C(b, -b^2 + 4b + 8)$ 、 $D(a, -a^2 + 4a + 8)$ となる。

ここで、 C と D の y 座標は等しい必要があるので

$$\begin{aligned}-b^2 + 4b + 8 &= -a^2 + 4a + 8 \\ \Leftrightarrow (a + b - 4)(a - b) &= 0\end{aligned}$$

$a < b$ なので、

$$\begin{aligned}a + b - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 4 - b\end{aligned}$$

AB の長さは

$$b - a = 2b - 4$$

BC の長さは

$$-b^2 + 4b + 8$$

なので、長方形 ABCD の面積を $f(b)$ とおくと

$$\begin{aligned}f(b) &= (2b - 4)(-b^2 + 4b + 8) \\ &= 2(-b^3 + 6b^2 - 16)\end{aligned}$$

となる。ここで、 b のとりうる値の範囲を求める。

図より、点 B は $y = -x^2 + 4x + 8$ の軸よりも x 座標の大きい側にある必要がある。

$$y = -x^2 + 4x + 8 = -(x - 2)^2 + 12$$

と変形できることから、この放物線の軸は $x = 2$ であり、 $b > 2$ であることが分かる。

さらに、点 C の y 座標が正であることから、

$$\begin{aligned}-b^2 + 4b + 8 &> 0 \\ \Leftrightarrow 2 - 2\sqrt{3} < b < 2 + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

以上より、 $2 < b < 2 + 2\sqrt{3}$ である。

$$f'(b) = -6b(b - 4)$$

であるから、 $f(b)$ の増減表は次のようになる。

b	2	...	4	...	$2 + 2\sqrt{3}$
$f'(b)$	$\times$	+	0	-	$\times$
$f(b)$	$\times$	$\nearrow$	32	$\searrow$	$\times$

増減表より、長方形の面積の最大値は、32 であることが分かる。

(答) 32

(3)

$$\begin{aligned}\log_{10} 5^{2010} &= 2010 \log_{10} 5 \\ &= 2010 \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= 2010(1 - \log_{10} 2) \\ &= 1404.99\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}1404 < \log_{10} 5^{2010} < 1405 \\ \Leftrightarrow 10^{1404} < 5^{2010} < 10^{1405}\end{aligned}$$

これより、 5^{2010} の桁数は 1405 である。

(答) 1405

(4)

$$\begin{aligned}y &= \sin x - \cos x + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} - \cos x \sin \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \left\{ \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 1 \right\}\end{aligned}$$

ここで、 $0 \leq x \leq 2\pi$ なので

$$-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore -1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$$

よって、 y は

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \quad \text{すなわち } x = \frac{3\pi}{4} \text{ のときに最大値 } 2\sqrt{2} \text{ をとり、}$$

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = -1 \quad \text{すなわち } x = \frac{7\pi}{4} \text{ のときに最小値 } 0 \text{ をとることが分かる。}$$

(答) 最大値 $2\sqrt{2} \left(x = \frac{3\pi}{4} \right)$ 、最小値 $0 \left(x = \frac{7\pi}{4} \right)$

問題 2

(1)

$$0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad y(y - x^2 + ax) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad y \leq 0 \quad \text{かつ} \quad y - x^2 + ax \geq 0) \\ \text{または} \\ (0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad y \geq 0 \quad \text{かつ} \quad y - x^2 + ax \leq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad x(x-a) \leq y \leq 0) \\ \text{または} \\ (0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq y \leq x(x-a)) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

[1] $a=1$ のとき

①に $a=1$ を代入して,

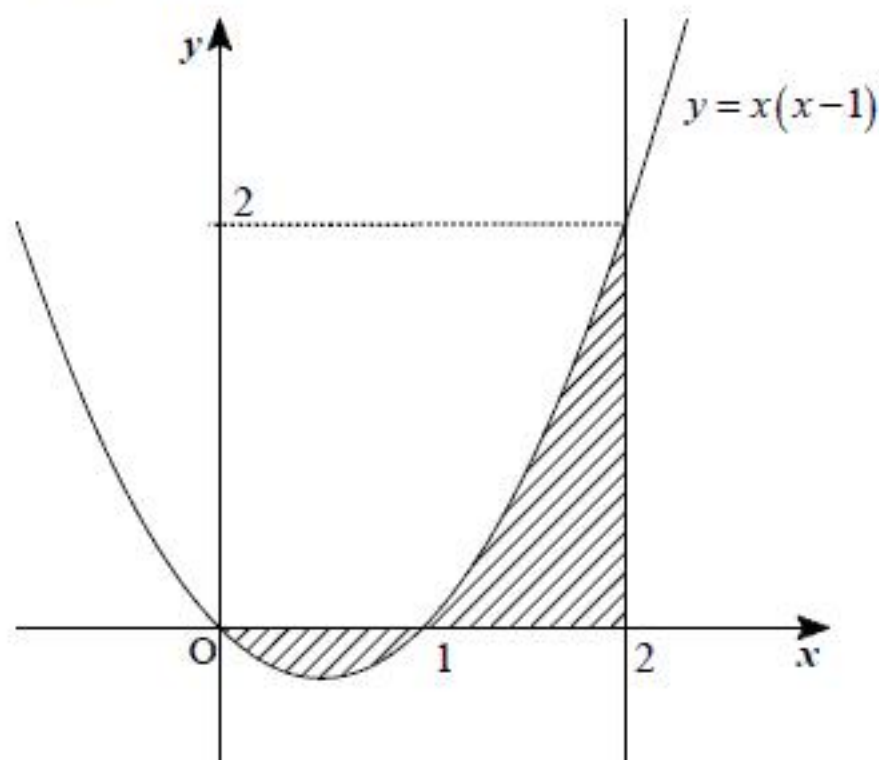
$$(0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad x(x-1) \leq y \leq 0)$$

または

$$(0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq y \leq x(x-1))$$

この条件を満たす領域が $D(1)$ であり,

これを図示すると次図斜線部ようになる。(境界を含む)



(答)

[2] $a=-2$ のとき

①に $a=-2$ を代入して,

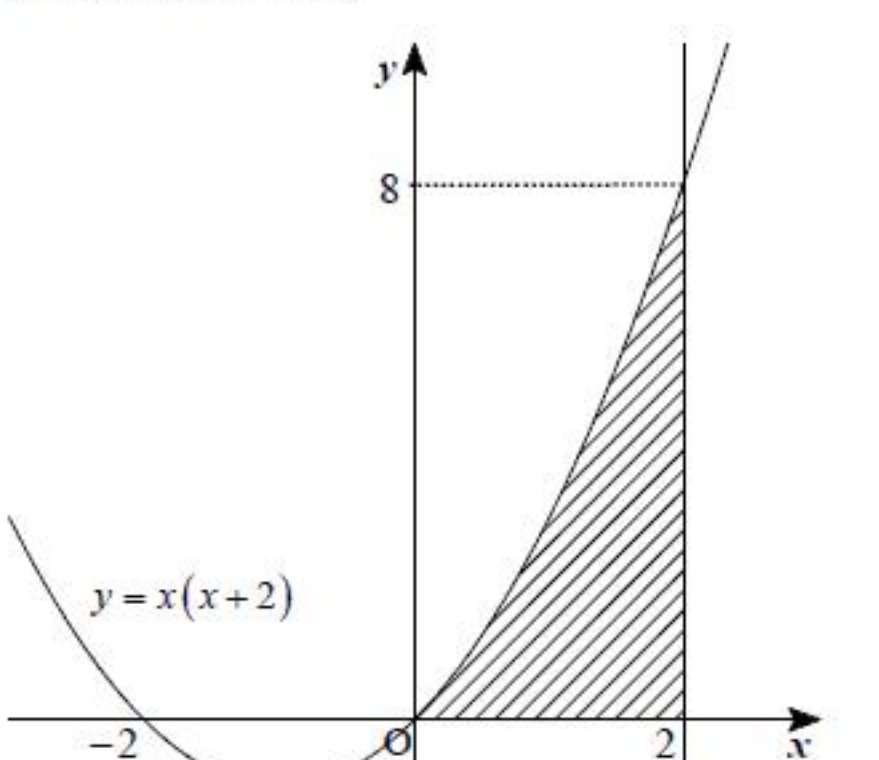
$$(0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad x(x+2) \leq y \leq 0)$$

または

$$(0 \leq x \leq 2 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq y \leq x(x+2))$$

この条件を満たす領域が $D(-2)$ であり,

これを図示すると次図斜線部ようになる。(境界を含む)

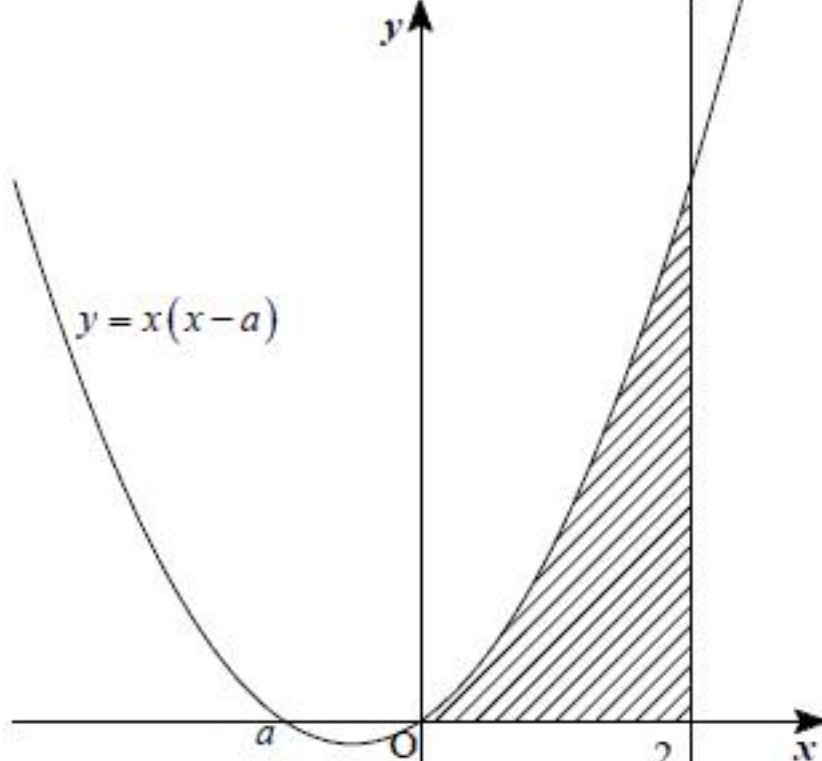


(答)

(2)

[1] $a < 0$ のとき

$D(a)$ は, 次図斜線部ようになる。

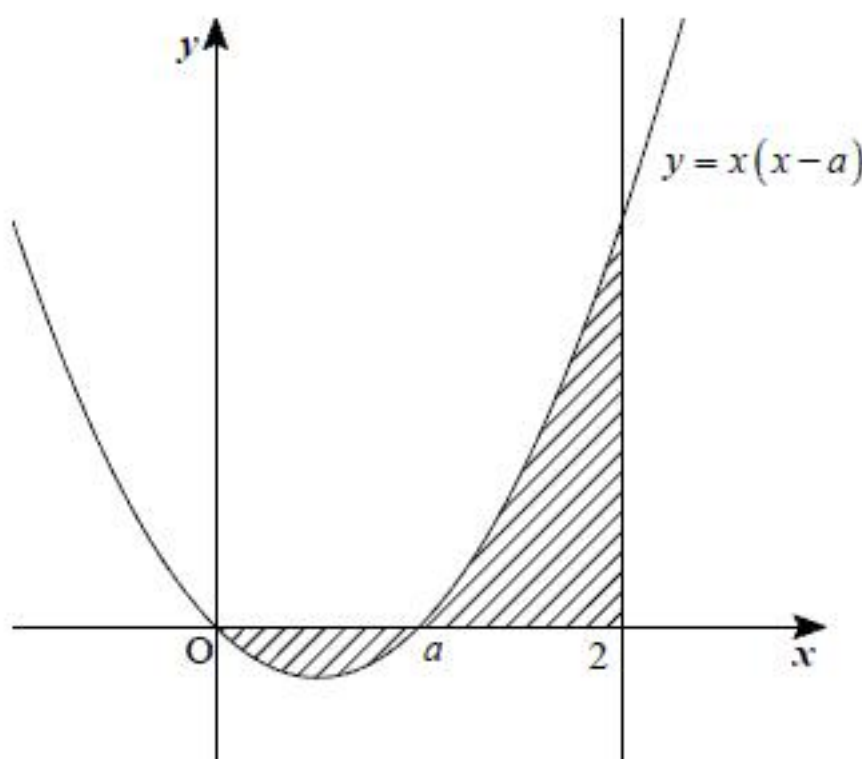


よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^2 \{x(x-a)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= -2a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

[2] $0 \leq a < 2$ のとき

$D(a)$ は, 次図斜線部ようになる。

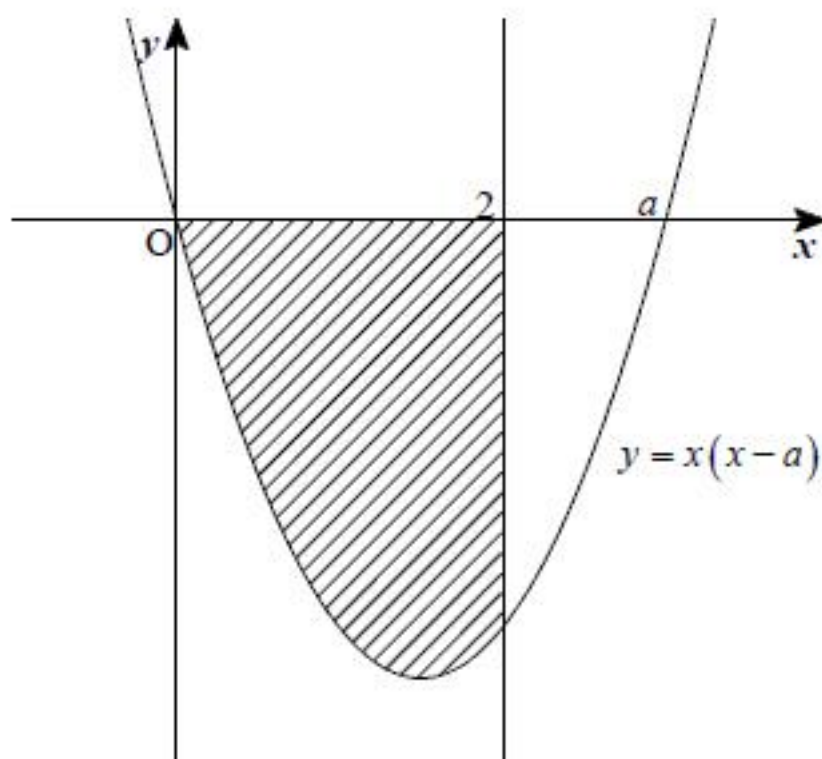


よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a \{-(x^2 - ax)\} dx + \int_a^2 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^a + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2 \right]_a^2 \\ &= \frac{a^3}{3} - 2a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$

[3] $2 \leq a$ のとき

$D(a)$ は, 次図斜線部ようになる。



よって, 求める面積は

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^2 \{-(x^2 - ax)\} dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^2 \\ &= 2a - \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$(答) \quad \begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & S(a) = -2a + \frac{8}{3} \\ 0 \leq a < 2 \text{ のとき} & S(a) = \frac{a^3}{3} - 2a + \frac{8}{3} \\ 2 \leq a \text{ のとき} & S(a) = 2a - \frac{8}{3} \end{cases}$$

問題 3

(1)

$A_n(x_n, 0)$ と $P(1, 2)$ を通る直線は、 x 軸に平行ではないので、
 a, b を実数として、方程式は $x = ay + b$ とおける。すると、

$$x_n = b \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$1 = 2a + b \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

が成り立つ。①-②より、

$$x_n - 1 = -2a \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{3}$$

を得る。 $x = ay + b$ の両辺に 2 をかけて、①、③を用いると、直線 A_nP の方程式は

$$2x = 2ay + 2b$$

$$\Leftrightarrow 2x = -(x_n - 1)y + 2x_n$$

$$\Leftrightarrow 2(x - x_n) + (x_n - 1)y = 0$$

となる。また、 $B_n(0, y_n)$ と $Q(2, 1)$ を通る直線の方程式は、

$$y = \frac{1 - y_n}{2 - 0}x + y_n$$

$$\Leftrightarrow (y_n - 1)x + 2(y - y_n) = 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A_nP: 2(x - x_n) + (x_n - 1)y = 0, \quad B_nQ: (y_n - 1)x + 2(y - y_n) = 0$$

(2)

$B_n(0, y_n)$ は直線 A_nP 上にあるので、

$$-2x_n + (x_n - 1)y_n = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

また、 $A_{n+1}(x_{n+1}, 0)$ は直線 B_nQ 上にあるので、

$$(y_n - 1)x_{n+1} - 2y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_{n+1} + (x_{n+1} - 2)y_n = 0 \quad \cdot \cdot \cdot \textcircled{5}$$

$(x_{n+1} - 2) \times \textcircled{4} - (x_n - 1) \times \textcircled{5}$ を計算すると、

$$-2(x_{n+1} - 2)x_n + (x_{n+1} - 2)(x_n - 1)y_n + x_{n+1}(x_n - 1) - (x_{n+1} - 2)(x_n - 1)y_n = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} + x_{n+1}x_n - 4x_n = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_n + 1)x_{n+1} = 4x_n$$

ここで、明らかに $x_n + 1 > 0$ であるから

$$x_{n+1} = \frac{4x_n}{x_n + 1}$$

$$(\text{答}) \quad x_{n+1} = \frac{4x_n}{x_n + 1}$$

(3)

明らかに $x_n > 0$ なので、(2)の答の逆数をとってよい。

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4x_n}$$

$$\Leftrightarrow z_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z_n \quad \left(\because z_n = \frac{1}{x_n} \right)$$

$$\Leftrightarrow z_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(z_n - \frac{1}{3} \right)$$

よって、数列 $\left\{ z_n - \frac{1}{3} \right\}$ は、初項 $z_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。

したがって

$$z_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow z_n = \frac{2 \cdot 4^{n-1} - 1}{6 \cdot 4^{n-1}}$$

と書け、

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{z_n} \\ &= \frac{6 \cdot 4^{n-1}}{2 \cdot 4^{n-1} - 1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad x_n = \frac{6 \cdot 4^{n-1}}{2 \cdot 4^{n-1} - 1}$$