

問題 1

(1)

$$\frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(5^{n+2}+2^{2n-1}\right)}{5^n+2^{2n}} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

において,

$$\begin{aligned} (\text{分子}) &= \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(5^{n+2}+2^{2n-1}\right) \\ &= 5^n \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \cdot \left(25+\frac{2^{2n-1}}{5^n}\right) \\ &= 5^n \cdot \sqrt{n} \cdot \frac{-1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \cdot \left\{25+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} \\ &= 5^n \cdot (-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \cdot \left\{25+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} \\ (\text{分母}) &= 5^n+2^{2n}=5^n \cdot \left\{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

と変形できる。したがって第 n 項が①で表せる数列の極限は,

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}} \cdot \left\{25+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}}{1+\left(\frac{4}{5}\right)^n} \\ &= \frac{(-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} \cdot \left\{25+\frac{1}{2} \cdot 0\right\}}{1+0} \\ &= -\frac{25}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\frac{25}{2}$$

(2)

$$f(x)=\sqrt{\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)^3}=\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{3}{2}}$$

と表せるので、これを微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3}{2} \left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)' \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{x^2+3-2x(x-1)}{(x^2+3)^2}\right) \\ &= -\frac{3(x+1)(x-3)\sqrt{x-1}}{2(x^2+3)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad f'(x) = -\frac{3(x+1)(x-3)\sqrt{x-1}}{2(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}$$

(3)

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) dx &= \left[x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) dx \\ &= \left[-\frac{x}{2} \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{4} \sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{8} \right) - \left(0 - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}\pi+2\sqrt{2}}{8}$$

(4)

$$t=\sqrt{2x+1}$$

とおくと、このとき

x	$0 \quad \rightarrow \quad 4$
t	$1 \quad \rightarrow \quad 3$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$x = \frac{t^2-1}{2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_1^3 \frac{t^2-1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \cdot \sqrt{2x+1} dt \\ &= \int_1^3 \frac{t^2-1}{2} dt \\ &= \left[\frac{1}{6} t^3 - \frac{1}{2} t \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{10}{3}$$

問題 2

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin x + \cos 2x \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + 1 \\ &= -2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

であるから、 $0 \leq x \leq 2\pi$ における $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	0	...	$\frac{1}{6}\pi$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0		0	+	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗		↗	

ここで

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f\left(\frac{1}{6}\pi\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ f\left(\frac{5}{6}\pi\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \\ f\left(\frac{3}{2}\pi\right) &= 0 \\ f(2\pi) &= 1 \end{aligned}$$

である。以上より、関数 $f(x)$ は $x = \frac{1}{6}\pi$ で最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 、 $x = \frac{5}{6}\pi$ で最小値 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる。

$$\text{(答)} \quad x = \frac{1}{6}\pi \text{ で最大値 } \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad x = \frac{5}{6}\pi \text{ で最小値 } -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

(2)

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos x - 2\sin 2x \\ &= -\cos x(1 + 4\sin x) \end{aligned}$$

より、

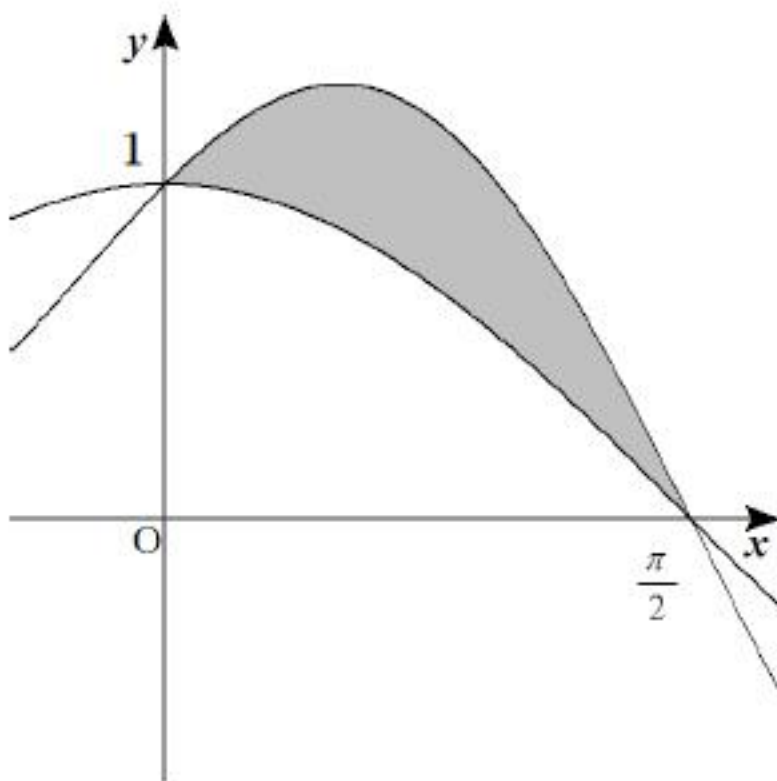
$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos x &= 0, \sin x = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。これをみたす x は、 $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲に 4 つ存在する。また、これらの点で $f''(x)$ の

正負が入れかわるので、曲線 $y = f(x)$ の変曲点は 4 個存在する。

(証明完了)

(3)



面積を求める図形は上図の灰色部のようになる。したがってその面積は

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x + \frac{1}{2} \sin 2x - \cos x \right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1}{2}$$

問題 3

(1)

以下、 O を零行列、 E を単位行列とする。

$a+d \neq 0$ と仮定すると、ケーリー・ハミルトンの定理から

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E &= O \\ \Leftrightarrow (1+ad-bc)E &= (a+d)A \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b=c=0 \\ 1+ad-bc=(a+d)a=(a+d)d \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} b=c=0 \\ a=d \\ 1+a^2=2a^2=2d^2 \end{cases} \\ \Rightarrow a=d=1, b=c=0 &\text{または } a=d=-1, b=c=0 \end{aligned}$$

となり、条件を満たさない。

したがって $a+d=0$ である。

このときケーリー・ハミルトンの定理から

$$\begin{aligned} A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E &= O \\ \Leftrightarrow A^2 + (ad-bc)E &= O \quad (\because a+d=0) \\ \Leftrightarrow E + (ad-bc)E &= O \quad (\because A^2=E) \\ \Leftrightarrow ad-bc &= -1 \end{aligned}$$

となる。

以上より、 $a+d=0, ad-bc=-1$ が成り立つ。

(証明完了)

(2)

以下、 z は 0 でない実数であるとする。

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A-E) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= O \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)x+by=0 \\ cx+(d-1)y=0 \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ であることの必要十分条件は、

$$\begin{cases} (a-1)x+by=0 \\ cx+(d-1)y=0 \end{cases}$$

である。

[1] $(a, b) \neq (1, 0)$ のとき

$$(x, y) = (-bz, (a-1)z)$$

とすれば、 $x^2+y^2 \neq 0$ であり、

$$(a-1)x+by = (a-1)(-b)z + b(a-1)z = 0$$

また、

$$\begin{aligned} cx+(d-1)y &= c(-b)z + (d-1)(a-1)z \\ &= \{ad-bc-(a+d)+1\}z \\ &= 0 \quad (\because a+d=0, ad-bc=-1) \end{aligned}$$

となる。したがって条件を満たすような実数 x, y は存在する。

[2] $(a, b) = (1, 0)$ のとき

$a+d=0$ より $d=-1$ なので、

$$(x, y) = (2z, cz)$$

とおくと、 $x^2+y^2 \neq 0$ であり、

$$\begin{cases} (a-1)x+by=0 \\ cx+(d-1)y=c(2z)+(-2)cz=0 \end{cases}$$

となる。したがって条件を満たすような実数 x, y は存在する。

以上[1], [2]より、条件を満たすような実数 x, y が存在することが示された。

また同様に、

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (A+E) \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} &= O \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (a+1)s+bt=0 \\ cs+(d+1)t=0 \end{cases} \end{aligned}$$

より、 $A \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ であることの必要十分条件は、

$$\begin{cases} (a+1)s+bt=0 \\ cs+(d+1)t=0 \end{cases}$$

である。

[3] $(a, b) \neq (-1, 0)$ のとき

$$(s, t) = (-bz, (a+1)z)$$

とすれば、 $s^2+t^2 \neq 0$ であり、

$$(a+1)s+bt = (a+1)(-b)z + b(a+1)z = 0$$

また、

$$\begin{aligned} cs+(d+1)t &= c(-b)z + (d+1)(a+1)z \\ &= \{ad-bc-(a+d)+1\}z \\ &= 0 \quad (\because a+d=0, ad-bc=-1) \end{aligned}$$

となる。したがって条件を満たすような実数 s, t は存在する。

[4] $(a, b) = (-1, 0)$ のとき

$a+d=0$ より $d=-1$ なので、

$$(s, t) = (-2z, cz)$$

とおくと、 $s^2+t^2 \neq 0$ であり、

$$\begin{cases} (a+1)s+bt=0 \\ cs+(d+1)t=c(-2z)+2cz=0 \end{cases}$$

となる。したがって条件を満たすような実数 s, t は存在する。

以上[3], [4]より、条件を満たす実数 s, t が存在することが示された。

(証明完了)

(3)

$b=c$ のとき、(1), (2)より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by=x \\ bx-ay=y \\ as+bt=-s \\ bs-at=-t \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって

$$\begin{aligned} xs+yt &= -(ax+by)(as+bt) - (bs-ay)(bs-at) \\ &= -(a^2+b^2)(xs+yt) \end{aligned}$$

また(1)より $1 = -(ad-bc) = a^2+b^2$ なので

$$\begin{aligned} xs+yt &= -(xs+yt) \\ \therefore xs+yt &= 0 \end{aligned}$$

となる。

(証明完了)