

1

(1)

真数条件より、

$$x^2 - 2 > 0 \text{ かつ } 2x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > \sqrt{2}$$

また、

$$\log_2(x^2 - 2) - \log_2(2x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 2) \leq \log_2(2x + 1)$$

底 $2 > 1$ より、

$$x^2 - 2 \leq 2x + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3$$

これと $x > \sqrt{2}$ とから、求める実数 x の値の範囲は、

$$\sqrt{2} < x < 3$$

である。

$$(\text{答}) \quad \sqrt{2} < x < 3$$

(2)

求める円の中心の位置によって場合分けする。

[1] 円の中心が第一象限、第三象限のとき

このとき、円の半径を $|r|$ (r は 0 でない実数) とすれば、求める円の方程式は、

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = |r|^2 = r^2$$

と表せる。この円の中心は (r, r) で、これが円 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ 上にあるので、

$$(r - 2)^2 + (r - 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (r - 6)(r + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 6, -1$$

となる。よって、円の方程式は、

$$(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

である。

[2] 円の中心が第二象限、第四象限のとき

同様に円の半径を $|r|$ とすれば、求める円の方程式は、

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$$

である。この円の中心は $(r, -r)$ で、これが円 $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$ 上にあるので、

$$(r - 2)^2 + (-r - 3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow (r - 2)(r + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow r = 2, -3$$

となる。よって、円の方程式は、

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

である。

[1], [2] から、求める円の方程式は、

$$(x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 36$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

である。

$$(\text{答}) \quad (x - 6)^2 + (y - 6)^2 = 25$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$$

$$(x - 2)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$$

(3)

 $P(x)$ を $(x - 1)^2$ で割った余りが $5x - 7$ なので、 $P(x)$ はある整式 $Q_1(x)$ を用いて、

$$P(x) = (x - 1)^2 Q_1(x) + 5x - 7$$

と表せる。さらに、 $Q_1(x)$ を $x - 2$ で割った余りを a とすると、 $Q_1(x)$ は別の整式 $Q_2(x)$ を用いて、

$$Q_1(x) = (x - 2)Q_2(x) + a$$

と表せる。よって、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)^2 \{ (x - 2)Q_2(x) + a \} + 5x - 7 \\ &= (x - 1)^2 (x - 2)Q_2(x) + a(x - 1)^2 + 5x - 7 \end{aligned}$$

となる。ここで、 $P(x)$ を $x - 2$ で割ると 10 余るので、剰余の定理から、

$$P(2) = 0 + a(2 - 1)^2 + 5 \cdot 2 - 7 = a + 3 = 10$$

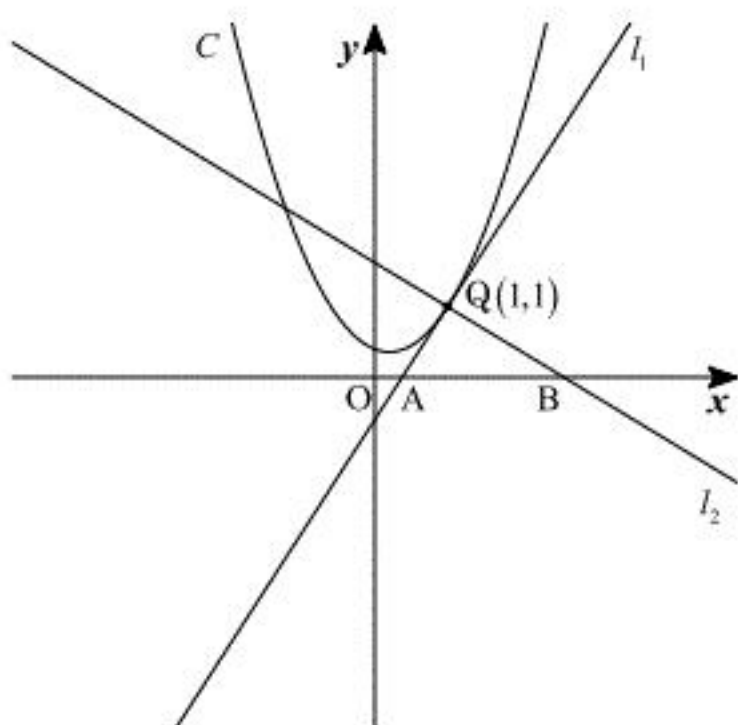
$$\Leftrightarrow a = 7$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)^2 (x - 2)Q_2(x) + 7(x - 1)^2 + 5x - 7 \\ &= (x - 1)^2 (x - 2)Q_2(x) + 7x^2 - 9x \end{aligned}$$

となり、求める余りは $7x^2 - 9x$ である。

$$(\text{答}) \quad 7x^2 - 9x$$



(1)

放物線 C の軸が $x=p$ なので、ある実数 r を用いて C の方程式は、 $y=(x-p)^2+r$ と表せる。

放物線 C が点 $Q(1,1)$ を通るので、

$$\begin{aligned} 1 &= (1-p)^2 + r \\ \Leftrightarrow r &= -p^2 + 2p \end{aligned}$$

となる。よって、放物線 C の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (x-p)^2 - p^2 + 2p \\ &= x^2 - 2px + 2p \end{aligned}$$

である。

(答) $y = x^2 - 2px + 2p$

(2)

放物線 $C: y = x^2 - 2px - 2p$ について、 $y' = 2x - 2p$ なので、点 Q での接線の方程式は、

$$\begin{aligned} l_1: y-1 &= (2-2p)(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= 2(1-p)x + 2p-1 \end{aligned}$$

となるが、 $\vec{a}$ は l_1 の方向ベクトルなので、

$$\vec{a} = (1, 2-2p)$$

であるから、

$$m = 2(1-p)$$

となる。また、 l_1 と l_2 は直交するので $p < 1$ に注意して l_2 の傾きは $-\frac{1}{2(1-p)}$ である。よって、

$$\begin{aligned} l_2: y-1 &= -\frac{1}{2(1-p)}(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{2(1-p)}x + \frac{3-2p}{2(1-p)} \end{aligned}$$

となるが、 $\vec{b}$ は l_2 の方向ベクトルなので、

$$\vec{b} = \left(1, -\frac{1}{2(1-p)} \right)$$

であるから、

$$n = -\frac{1}{2(1-p)}$$

となる。

(答) $m = 2(1-p), n = -\frac{1}{2(1-p)}$

(3)

$$\vec{v} = \vec{q} + s\vec{a} + t\vec{b} \Leftrightarrow \vec{v} - \vec{q} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

となるから、 $\vec{v}$ が表す点を V とすると、 $\vec{v} - \vec{q} = \overrightarrow{OV} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{QV}$ である。ここで、 l_1, l_2 の方程式から点 A, B の座標をそれぞれ求めると、

$$A\left(\frac{1-2p}{2(1-p)}, 0\right), B(3-2p, 0)$$

なので、

$$\begin{aligned} \begin{cases} \overrightarrow{QA} = \left(\frac{1-2p}{2(1-p)}, 0\right) - (1, 1) = \left(-\frac{1}{2(1-p)}, -1\right) = -\frac{1}{2(1-p)}\vec{a} \\ \overrightarrow{QB} = (3-2p, 0) - (1, 1) = (2-2p, -1) = 2(1-p)\vec{b} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a} = -2(1-p)\overrightarrow{QA} \\ \vec{b} = \frac{1}{2(1-p)}\overrightarrow{QB} \end{cases} \end{aligned}$$

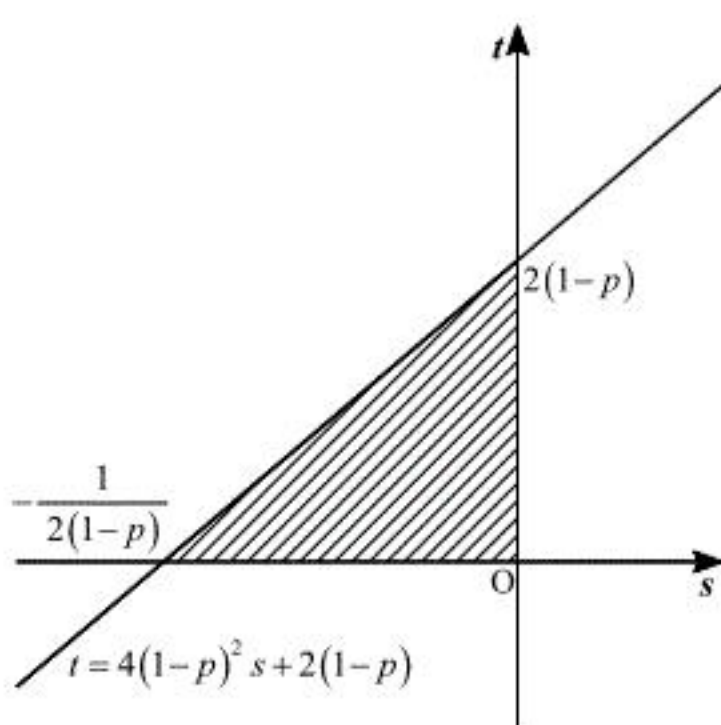
となる。よって、

$$\overrightarrow{QV} = -2s(1-p)\overrightarrow{QA} + \frac{t}{2(1-p)}\overrightarrow{QB}$$

である。ゆえに、点 V が $\triangle QAB$ の内部および周上にあるための条件は、

$$\begin{aligned} -2s(1-p) \geq 0, \frac{t}{2(1-p)} \geq 0, -2s(1-p) + \frac{t}{2(1-p)} \leq 1 \\ \Leftrightarrow s \leq 0, 0 \leq t \leq 4(1-p)^2 s + 2(1-p) \quad (\because p < 1) \end{aligned}$$

よって、これを図示すると点 (s, t) の存在する領域は次図の斜線部になる。



(答) 前図

3

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

より、次の増減表を得る。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

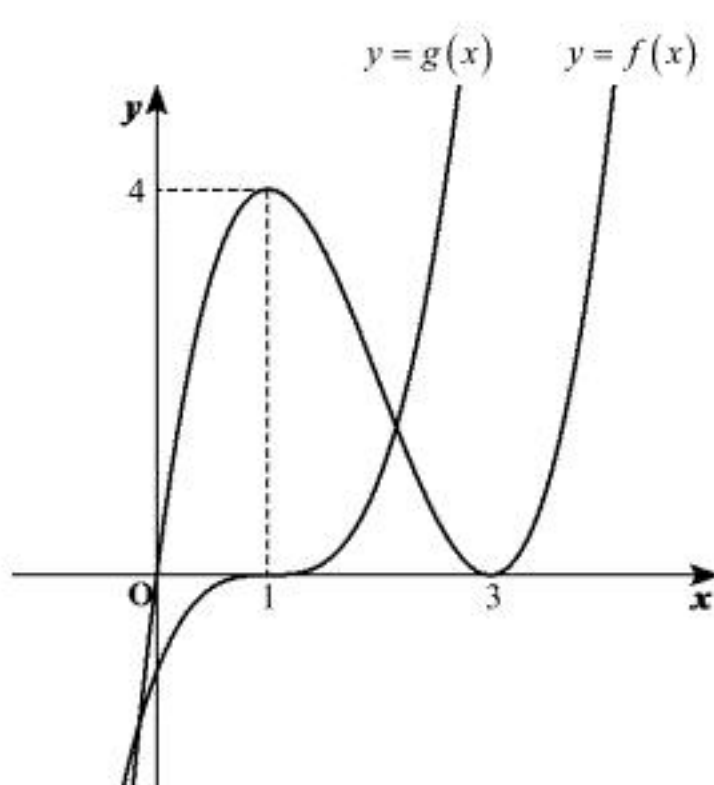
また、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3x^2 - 6x + 3 \\ &= 3(x-1)^2 \end{aligned}$$

より、次の増減表を得る。

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

以上より、 $f(x)$ と $g(x)$ を図示すると次のようになる。



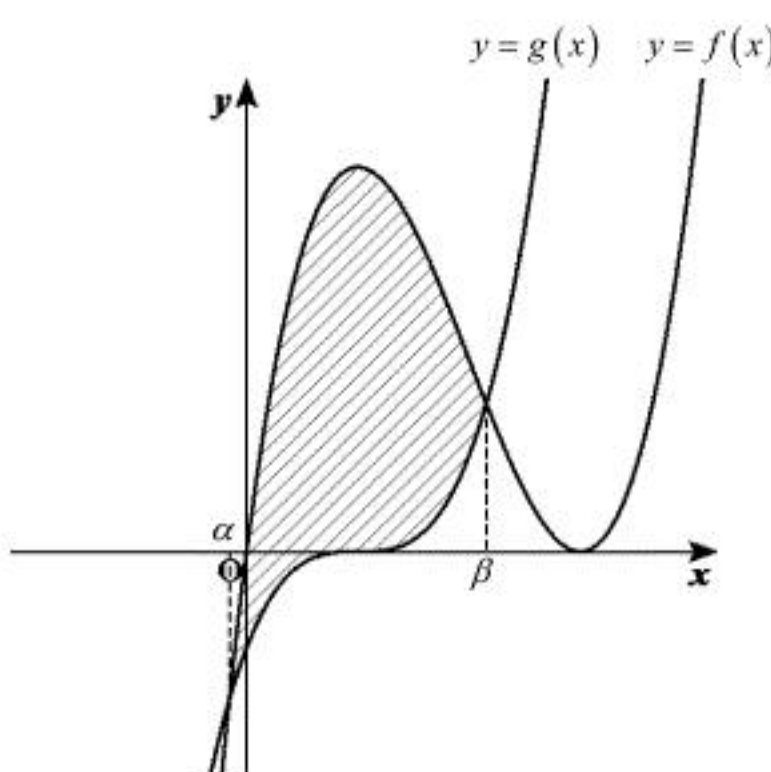
(答) 前図

(2)

$f(x) = g(x)$ とすると、

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 9x &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \\ \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{3 \pm 2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

この解を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、求めるのは次図の斜線部の面積である。



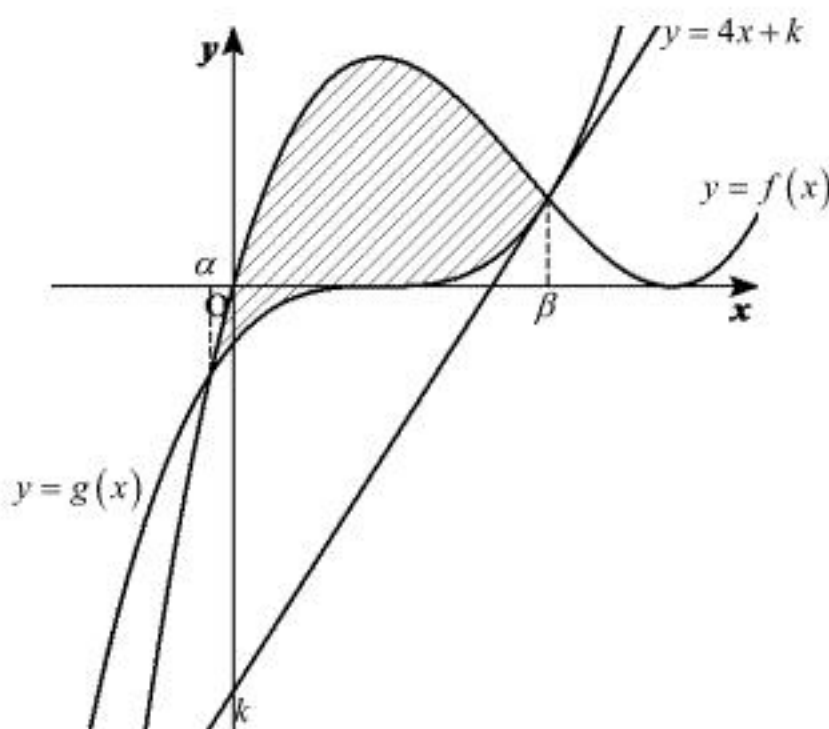
よって求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \{f(x) - g(x)\} dx &= -\int_{\alpha}^{\beta} 3(x-\alpha)(x-\beta) dx \\ &= 3 \cdot \frac{1}{6} (\beta - \alpha)^3 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3} - \frac{3-2\sqrt{3}}{3} \right)^3 \\ &= \frac{32\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{32\sqrt{3}}{9}$

(3)



$g'(\beta) = 4$ であることから、直線 $y = 4x + k$ は、傾きが 4、 y 切片が k の直線なので、図のように、直線 $y = 4x + k$ が点 $(\beta, f(\beta))$ を通るときに k は最小となる。よって、求める k の最小値は、

$$\begin{aligned} k_{\min} &= f(\beta) - 4\beta \\ &= \beta(\beta-3)^2 - 4\beta \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3} - 3 \right)^2 - 4 \cdot \frac{3+2\sqrt{3}}{3} \\ &= -4 - \frac{16\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

である。

(答) $-4 - \frac{16\sqrt{3}}{9}$

(1)

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+2)e^{x+2} + (x^2+2x+a)e^{x+2} \\ &= (x^2+4x+a+2)e^{x+2} \end{aligned}$$

なので、 $f'(x)=0$ とすると、 $e^{x+2}>0$ から、

$$x^2+4x+a+2=0$$

この2次方程式が異なる2つの解を持てばよいので、判別式を D として、

$$\frac{D}{4} = 2^2 - (a+2) > 0 \Leftrightarrow a < 2$$

これが求める a の値の範囲である。

(答) $a < 2$

(2)

$f'(x)=0$ の解を $x=\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ とすると、次の増減表が書ける。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって、 $M=f(\alpha), m=f(\beta)$ である。 α, β は $x^2+4x+a+2=0$ の解なので、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-4 \\ \alpha\beta=a+2 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{cases} \alpha^2+4\alpha+a+2=0 \Leftrightarrow \alpha^2=-4\alpha-a-2 \\ \beta^2+4\beta+a+2=0 \Leftrightarrow \beta^2=-4\beta-a-2 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} M \cdot m &= f(\alpha)f(\beta) \\ &= (\alpha^2+2\alpha+a)e^{\alpha+2}(\beta^2+2\beta+a)e^{\beta+2} \\ &= (-4\alpha-a-2+2\alpha+a)(-4\beta-a-2+2\beta+a)e^{\alpha+\beta+4} \quad (\textcircled{2} \text{より}) \\ &= (\alpha+1)(\beta+1)e^{\alpha+\beta+4} \\ &= 4(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)e^{\alpha+\beta+4} \\ &= 4(a-1) \quad (\textcircled{1} \text{より}) \end{aligned}$$

ゆえに、 $M \cdot m = -4$ なので、

$$4(a-1) = -4 \Leftrightarrow a = 0$$

(答) $a = 0$

(3)

$a=0$ のとき、 $f(x)=(x^2+2x)e^{x+2}$ である。 $f(x)=0$ とすると、 $x=0, -2$ である。また、

$$f'(x)=(x^2+4x+2)e^{x+2}$$

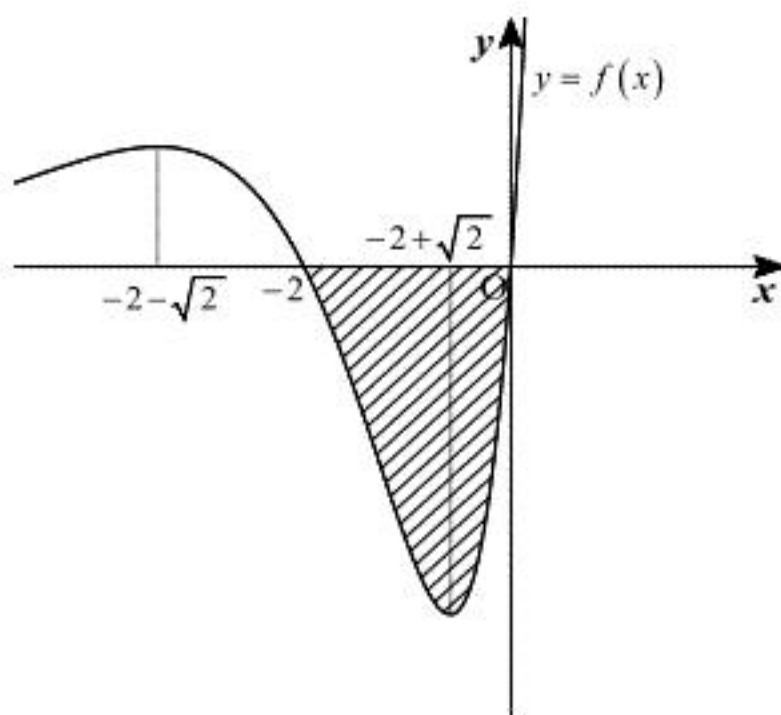
なので、 $f'(x)=0$ とすると、

$$x = -2 \pm \sqrt{2}$$

なので、次の増減表が書ける。

x	$\cdots$	$-2-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-2+\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって $y=f(x)$ を図示すると次図のようになる。ただし、斜線部は面積を求める部分である。



よって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 -(x^2+2x)e^{x+2} dx \\ &= -\left[(x^2+2x)e^{x+2}\right]_{-2}^0 + 2\int_{-2}^0 (x+1)e^{x+2} dx \\ &= 0 + 2\left[(x+1)e^{x+2}\right]_{-2}^0 - 2\int_{-2}^0 e^{x+2} dx \\ &= 2\{e^2 - (-1)\} - 2\left[e^{x+2}\right]_{-2}^0 \\ &= 2e^2 + 2 - 2(e^2 - 1) \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

(答) $S = 4$

(1)

$$\begin{aligned}
 f(e-1) &= \log e + \sin a(e-1) \\
 &= 1 + \sin a(e-1) \\
 \Leftrightarrow \sin a(e-1) &= -1
 \end{aligned}$$

$a > 0, e > 1$ なので, $a(e-1) > 0$ である。よって, この等式を満たす最小の $a(e-1)$ は,

$$\begin{aligned}
 a(e-1) &= \frac{3\pi}{2} \\
 \Leftrightarrow a &= \frac{3\pi}{2(e-1)}
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad a = \frac{3\pi}{2(e-1)}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \int \log(x+1) dx &= \int (x+1)' \log(x+1) dx \\
 &= (x+1) \log(x+1) - \int (x+1) \cdot \frac{1}{(x+1)} dx \\
 &= (x+1) \log(x+1) - \int 1 dx \\
 &= (x+1) \log(x+1) - x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{2(e-1)}{3}} \left\{ \log(x+1) + \sin \frac{2(e-1)}{3} x \right\} dx &= \left[(x+1) \log(x+1) - x - \frac{3}{2(e-1)} \cos \frac{2(e-1)}{3} x \right]_0^{\frac{2(e-1)}{3}} \\
 &= \frac{2e+1}{3} \log \frac{2e+1}{3} - \frac{2(e-1)(\pi-2)}{3\pi}
 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2e+1}{3} \log \frac{2e+1}{3} - \frac{2(e-1)(\pi-2)}{3\pi}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{3(e-1)}{4}\right) &= \log\left(\frac{3e}{4} + \frac{1}{4}\right) + \sin \frac{3\pi}{2} \\
 &< \log\left(\frac{3e}{4} + \frac{e}{4}\right) + \sin \frac{3\pi}{2} \quad (\because 1 < e < 2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって,

$$f\left(\frac{3(e-1)}{4}\right) < 0$$

となる。また,

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{e-1}{4}\right) &= \log\left(\frac{e}{4} + \frac{3}{4}\right) + \sin \frac{\pi}{2} \\
 &> \log\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) + \sin \frac{\pi}{2} \quad (\because 1 < e < 2) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって,

$$f\left(\frac{e-1}{4}\right) > 0$$

となる。いま, 中間値の定理より, $f(x)$ は $\frac{e-1}{4} < x < \frac{3(e-1)}{4}$ で $f(x) = 0$ となる解をもつ。

ここで, $0 < \frac{e-1}{4}$ なので, $f(x) = 0$ は $0 < x < \frac{3(e-1)}{4}$ の範囲に解をもつ。

(証明終)

6

(1)

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \begin{cases} \alpha = \sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

(2)

点 X_1 の座標を (x_1, y_1) とおくと,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{3} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{6} & -\sin \frac{\pi}{6} \\ \sin \frac{\pi}{6} & \cos \frac{\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \left| 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \cdot \frac{3}{2} \right| \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

(3)

X_2 の座標を (x_2, y_2) とおくと,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &= A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{3}^2 \begin{pmatrix} \cos \frac{2\pi}{6} & -\sin \frac{2\pi}{6} \\ \sin \frac{2\pi}{6} & \cos \frac{2\pi}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって

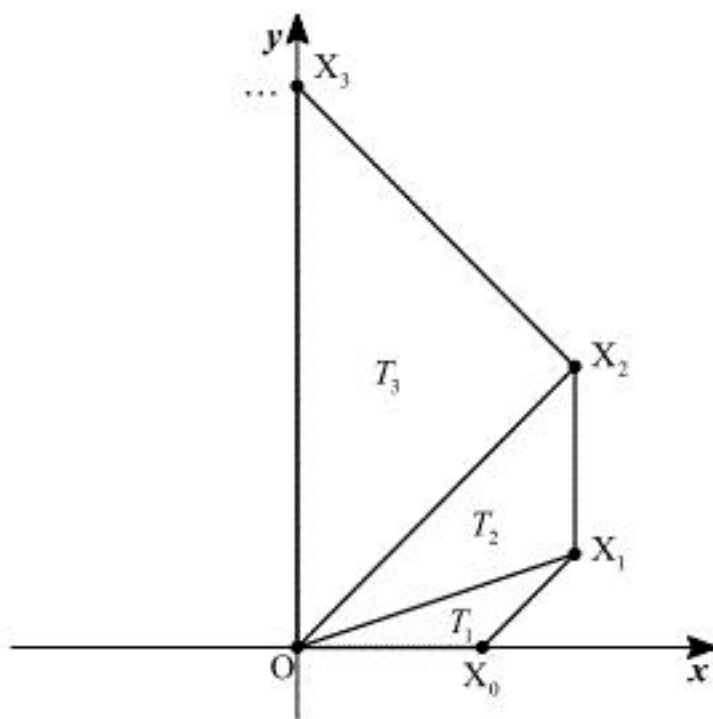
$$\begin{aligned} S_2 &= S_1 + \Delta OX_1X_2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \left| \frac{3}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{2} \right| \\ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) S_2 = \sqrt{3}$$

(4)

線分 OX_{k-1} , $X_{k-1}X_k$, OX_k で作られる三角形の面積を T_k とする。



行列 A による変換は, 原点からの距離を $\sqrt{3}$ 倍にし, 原点回りに $\frac{\pi}{6}$ 回転させる一次変換で

ある。 $1 \leq n < 12$ なので, $OX_0, X_0X_1, \dots, X_{n-1}X_n, X_nO$ で作られる多角形を分割した三角形 $\Delta OX_0X_1, \Delta OX_1X_2, \dots, \Delta OX_{n-1}X_n$ は互いに重ならない。ゆえに,

$$S_n = \sum_{k=1}^n T_k$$

である。ここで, 点 X_{k-1} , X_k の座標は,

$$\begin{aligned} X_{k-1} &: \left(\left(\sqrt{3} \right)^{k-1} \cos \frac{(k-1)\pi}{6}, \left(\sqrt{3} \right)^{k-1} \sin \frac{(k-1)\pi}{6} \right) \\ X_k &: \left(\left(\sqrt{3} \right)^k \cos \frac{k\pi}{6}, \left(\sqrt{3} \right)^k \sin \frac{k\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

であるので,

$$\begin{aligned} T_k &= \frac{1}{2} \left| \left(\sqrt{3} \right)^{k-1} \cos \frac{(k-1)\pi}{6} \cdot \left(\sqrt{3} \right)^k \sin \frac{k\pi}{6} - \left(\sqrt{3} \right)^k \cos \frac{k\pi}{6} \cdot \left(\sqrt{3} \right)^{k-1} \sin \frac{(k-1)\pi}{6} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \right)^{2k-1} \left| \cos \frac{(k-1)\pi}{6} \sin \frac{k\pi}{6} - \cos \frac{k\pi}{6} \sin \frac{(k-1)\pi}{6} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \right)^{2k-1} \left| \sin \left\{ \frac{k\pi}{6} - \frac{(k-1)\pi}{6} \right\} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{3} \right)^{2k-1} \left| \sin \frac{\pi}{6} \right| \\ &= \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} \right)^{2k-1} \end{aligned}$$

となり, S_n は,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \left(\sqrt{3} \right)^{2k-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{3^n - 1}{3 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{3} (3^n - 1)}{8} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) S_n = \frac{\sqrt{3} (3^n - 1)}{8}$$