

問題 1

(1)

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より,

$$y = -2\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x + 2$$

となる。 $\sin x = t$ とおくと、 $0 \leq x < 2\pi$ であるから、

$$-1 \leq t \leq 1$$

である。

$$\begin{aligned} y &= -2t^2 - 2\sqrt{3}t + 2 \\ &= -2\left(t + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

と変形できるので、 t の変域に注意すると、 $t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき y は最大値 $\frac{7}{2}$ をとり、 $t = 1$ のとき

最小値 $-2\sqrt{3}$ をとる。すなわち、 y は、 $x = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ のとき最大値 $\frac{7}{2}$ をとり、 $x = \frac{\pi}{2}$ のとき

最小値 $-2\sqrt{3}$ をとる。

$$(\text{答}) \text{ 最大値: } \frac{7}{2} \left(x = \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi \text{ のとき}\right), \text{ 最小値: } -2\sqrt{3} \left(x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}\right)$$

(2)

点 $P(2, 4)$ を通る直線は実数 a を用いて、

$$y = a(x - 2) + 4 = ax - 2a + 4 \quad \cdots \text{①}$$

と表せる。これが $x^2 + y^2 = 1$ に接すればよい。①を $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると、

$$x^2 + (ax - 2a + 4)^2 = 1$$

となる。これを整理すると、

$$(a^2 + 1)x^2 - 4a(a - 2)x + 4a^2 - 16a + 14 = 0$$

となる。上式の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= 4a^2(a - 2)^2 - (a^2 + 1)(4a^2 - 16a + 14) \\ &= -2a^2 + 16a - 14 \\ &= -2(a - 1)(a - 7) \end{aligned}$$

となる。 $D = 0$ となればよいので、

$$a = 1, 7$$

と求まる。したがって、点 P を通り、 $x^2 + y^2 = 1$ に接する直線の方程式は、

$$y = x + 2, y = 7x - 10$$

と求まる。

$$(\text{答}) y = x + 2, y = 7x - 10$$

(3)

条件より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 4a_n + 3 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} + 1 &= 4(a_n + 1) \\ \Leftrightarrow a_n + 1 &= 4^{n-1}(a_1 + 1) = 3 \cdot 4^{n-1} \\ \therefore a_n &= 3 \cdot 4^{n-1} - 1 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) a_n = 3 \cdot 4^{n-1} - 1$$

(4)(ア)

$$|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = 1 \quad \cdots \text{①}$$

である。与式を変形すると、

$$\begin{aligned} 13\overline{OA} + 12\overline{OB} + 5\overline{OC} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 13\overline{OA} + 12\overline{OB} &= -5\overline{OC} \end{aligned}$$

となるので、両辺を 2 乗して、

$$\begin{aligned} |13\overline{OA} + 12\overline{OB}|^2 &= 25|\overline{OC}|^2 \\ \Leftrightarrow 169|\overline{OA}|^2 + 312\overline{OA} \cdot \overline{OB} + 144|\overline{OB}|^2 &= 25|\overline{OC}|^2 \end{aligned}$$

となる。ここで①を代入すると、

$$\begin{aligned} 169 + 312\overline{OA} \cdot \overline{OB} + 144 &= 25 \\ \therefore \overline{OA} \cdot \overline{OB} &= -\frac{12}{13} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \overline{OA} \cdot \overline{OB} = -\frac{12}{13}$$

(2)(イ)

(ア)と同様にすると、

$$\overline{OB} \cdot \overline{OC} = 0, \overline{OC} \cdot \overline{OA} = -\frac{5}{13}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \triangle OAB &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OA}|^2 |\overline{OB}|^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{144}{169}} \\ &= \frac{5}{26} \end{aligned}$$

$$\triangle OBC = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \triangle OCA &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{OC}|^2 |\overline{OA}|^2 - (\overline{OC} \cdot \overline{OA})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{25}{169}} \\ &= \frac{6}{13} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \triangle OAB = \frac{5}{26}, \triangle OBC = \frac{1}{2}, \triangle OCA = \frac{6}{13}$$

問題 2

(1)

点 $P(p, -p^2)$, $Q(X, Y)$ とおくと,

$$\begin{cases} X = (1-t^2) \cdot 0 + t^2 \cdot p = t^2 p & \dots \textcircled{1} \\ Y = (1-t^2) \cdot 1 + t^2 \cdot (-p^2) = 1-t^2(p^2+1) & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

であるから, $t \neq 0$ より,

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow p = \frac{X}{t^2}$$

となるので, これを $\textcircled{2}$ に代入して,

$$\begin{aligned} Y &= 1-t^2 \left(\frac{X^2}{t^4} + 1 \right) \\ &= -\frac{1}{t^2} X^2 + 1-t^2 \end{aligned}$$

と求まる。よって C_t の方程式は,

$$y = -\frac{1}{t^2} x^2 + 1-t^2$$

となり, p が実数全体を動くとき, $X = t^2 p$ もまた実数全体を動くので, 定義域は実数全体となる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{t^2} x^2 + 1-t^2$$

(2)

$y = -x^2$ と $y = -\frac{1}{t^2} x^2 + 1-t^2$ から y を消去すると,

$$\begin{aligned} -x^2 &= -\frac{1}{t^2} x^2 + 1-t^2 \\ \Leftrightarrow (1-t^2)(x^2-t^2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $0 < t < 1$ であるから,

$$\begin{aligned} x^2 &= t^2 \\ \therefore x &= \pm t \end{aligned}$$

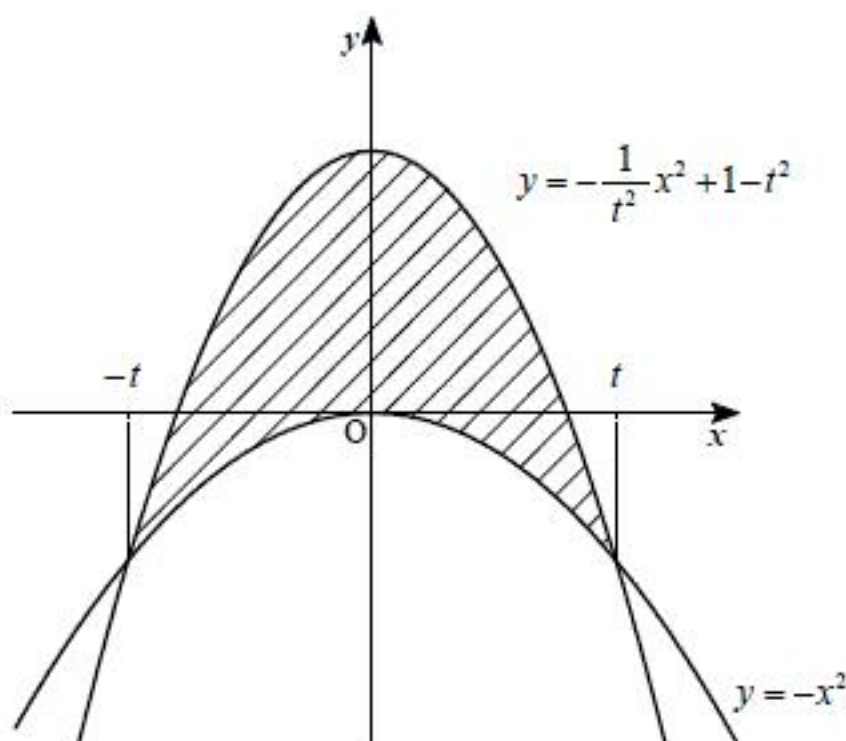
と求まる。したがって, $y = -x^2$ と $y = -\frac{1}{t^2} x^2 + 1-t^2$ の交点の座標は,

$$(x, y) = (t, -t^2), (-t, -t^2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (x, y) = (t, -t^2), (-t, -t^2)$$

(3)



放物線 $\textcircled{1}$ と軌跡 C に囲まれた面積は上図の斜線部であるから, この面積を $S(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_{-t}^t \left(-\frac{1}{t^2} x^2 + 1-t^2 + x^2 \right) dx \\ &= -\frac{1}{t^2} \int_{-t}^t \{ (1-t^2)x^2 + t^2(t^2-1) \} dx \\ &= -\frac{1-t^2}{t^2} \int_{-t}^t (x+t)(x-t) dt \\ &= \frac{1-t^2}{6t^2} (t+t)^3 \\ &= \frac{4}{3} t(1-t^2) \end{aligned}$$

と求まる。これを t で微分すると,

$$S'(t) = \frac{4}{3} (1-3t^2)$$

となるので,

$$S'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

であるから, 増減表は次のとおりである。

t	(0)	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	(1)
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって, $S(t)$ は $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で最大値を取る。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

問題 3

(1)

点PはA, M, Nが定める平面上に存在するから、実数 a, b を用いて、

$$\overrightarrow{AP} = a \overrightarrow{AM} + b \overrightarrow{AN}$$

とおける。これを変形すると、

$$\overrightarrow{OP} = (1-a-b) \overrightarrow{OA} + a \overrightarrow{OM} + b \overrightarrow{ON}$$

となるので、

$$\begin{cases} 1-a-b=s \\ a=t \\ b=u \end{cases}$$

とおくと、

$$s+t+u=1$$

であり、

$$\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{OA} + t \overrightarrow{OM} + u \overrightarrow{ON}$$

となる。

(証明終)

(2)

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OC}$$

である。Qは線分OG上に存在するから、実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{OQ} = k \overrightarrow{OG} = \frac{k}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{k}{3} \overrightarrow{OB} + \frac{k}{3} \overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。

$$\overrightarrow{OB} = 2 \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{x} \overrightarrow{ON}$$

であるから、これを①に代入して、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{k}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2k}{3} \overrightarrow{OM} + \frac{k}{3x} \overrightarrow{ON}$$

となる。点Qは△AMN上に存在するから、(1)より、

$$\frac{k}{3} + \frac{2k}{3} + \frac{k}{3x} = 1$$

となる。これを k について解くと、

$$k = \frac{3x}{3x+1}$$

となる。したがって、

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{3x}{3x+1} \overrightarrow{OG}$$

と表せる。以上より、

$$OQ:QG = 3x:3x+1-3x = 3x:1$$

となる。

(答) $OQ:QG = 3x:1$