

問題 1

(1)

実数 x に対して,

$$[x] \leq x < [x] + 1$$

が成り立つので,

$$x - 1 < [x] \leq x$$

が成り立つ。これに $x = 10^{2n}\pi$ を代入すると,

$$\begin{aligned} 10^{2n}\pi - 1 &< [10^{2n}\pi] \leq 10^{2n}\pi \\ \Leftrightarrow \pi - \frac{1}{10^{2n}} &< \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} \leq \pi \end{aligned}$$

であり,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{1}{10^{2n}} \right) = \pi$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} = \pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} = \pi$$

(2)

$t = \sqrt{1+e^x}$ とおくと,

$$y = \log \frac{t-1}{t+1} = \log(t-1) - \log(t+1)$$

となる。よって

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} = \frac{2}{t^2-1}$$

となる。 $t^2 = 1+e^x$ の両辺を x で微分して

$$2t \frac{dt}{dx} = e^x$$

であり, $e^x = t^2 - 1$ より

$$2t \frac{dt}{dx} = t^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

と表せるので,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{2}{t^2-1} \cdot \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1}{t} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$$

(3)

与式より

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x + 2\sin x \cos x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x(1 + 2\cos x) &= 0 \end{aligned}$$

であり, $0 < x < \pi$ において $\sin x \neq 0$ であるから

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}\pi$$

である。次に,

$$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi \text{ のとき } \sin x + \sin 2x \geq 0$$

$$\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi \text{ のとき } \sin x + \sin 2x \leq 0$$

であるから,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |\sin x + \sin 2x| dx &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\sin x + \sin 2x) dx - \int_{\frac{2}{3}\pi}^\pi (\sin x + \sin 2x) dx \\ &= -\left[\cos x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\cos x + \frac{\cos 2x}{2} \right]_{\frac{2}{3}\pi}^\pi \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \int_0^\pi |\sin x + \sin 2x| dx = \frac{5}{2}$$

(4)

与式より

$$\begin{aligned} A^2 - 2011A + E &= O \\ \Leftrightarrow 2011A - A^2 &= E \end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned} 2011A - A^2 &= A(2011E - A) \\ 2011A - A^2 &= (2011E - A)A \end{aligned}$$

を満たすので,

$$A(2011E - A) = (2011E - A)A = E$$

である。よって, A は逆行列 $2011E - A$ を持つことが示された。

(証明終)

問題 2

(1)

$y = f(x)$ が条件②を満たすとき,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} \log y &= \frac{1}{y^2} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{y} \right) &= \frac{1}{y^2} \\ \Leftrightarrow \frac{y''y - (y')^2}{y^2} &= \frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$y''y - (y')^2 = 1 \quad \dots \textcircled{3}$$

である。さらに、③の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}y'''y + y''y' - 2y''y' &= 0 \\ \Leftrightarrow y'''y - y''y' &= 0\end{aligned}$$

となる。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{y''}{y} \right) = \frac{y'''y - y''y'}{y^2} = 0$$

であるから、 $\frac{y''}{y}$ は定数である。ここで、③の両辺を y^2 で割って

$$\frac{y''}{y} = \frac{1}{y^2} + \frac{(y')^2}{y^2} > 0$$

が得られるので、 $\frac{y''}{y}$ は正の定数である。

(証明終)

(2)

$y' = k^2y$ を③に代入して,

$$\begin{aligned}k^2y^2 - (y')^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (ky - y')(ky + y') &= 1 > 0\end{aligned}$$

が得られる。よって、 $ky - y'$ と $ky + y'$ はともに正、またはともに負である。

$$(ky - y') + (ky + y') = 2ky > 0$$

であるから、ともに負の場合は矛盾する。

よって、 $ky - y' > 0$ および $ky + y' > 0$ が成り立つ。

(証明終)

(3)

$f(c) = a (> 0)$, $f'(c) = b$ とおく。

[1] $y' \geq 0$ のとき

$$kay + \frac{1}{k}by' = a(ky - y') + \frac{1}{k}y'(ka + b)$$

が成り立つ。(2)より $ky - y' > 0$ および $ka + b > 0$ であり、さらに $a > 0, k > 0, y' \geq 0$ を考慮

すると、 $kay + \frac{1}{k}by' > 0$ であることが分かる。

[2] $y' < 0$ のとき

$$kay + \frac{1}{k}by' = a(ky + y') - \frac{1}{k}y'(ka - b)$$

が成り立つ。(2)より $ky + y' > 0$ および $ka - b > 0$ であり、さらに $a > 0, k > 0, y' < 0$ を考慮す

ると、 $kay + \frac{1}{k}by' > 0$ であることが分かる。

[1][2]より、 $kay + \frac{1}{k}by'$ が条件①を満たすことが示された。

次に

$$\frac{d^2}{dx^2} \log \left(kay + \frac{1}{k}by' \right) = \frac{\left(kay'' + \frac{1}{k}by'' \right) \left(kay + \frac{1}{k}by' \right) - \left(kay' + \frac{1}{k}by'' \right)^2}{\left(kay + \frac{1}{k}by' \right)^2}$$

であり、 $y'' = k^2y$, $k^2y^2 - (y')^2 = 1$, $k^2a^2 - b^2 = 1$ を用いて分子を計算すると

$$\begin{aligned}(\text{分子}) &= k^2 \left(kay + \frac{1}{k}by' \right)^2 - (kay' + kby'')^2 \\ &= k^2 (k^2a^2 - b^2)y^2 - (k^2a^2 - b^2)(y')^2 \\ &= (k^2a^2 - b^2)(k^2y^2 - (y')^2) \\ &= 1\end{aligned}$$

となるので、 $kay + \frac{1}{k}by'$ が条件②を満たすことが示された。

以上より、 $kay + \frac{1}{k}by'$ が性質(P)を持つことが示された。

(証明終)

問題 3

(1)

C 上の点 $P(s, t)$ が $M(\theta)$ で表される 1 次変換により点 $P'(s', t')$ に移るとする。

$$\begin{pmatrix} s' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{2} \sin \theta \\ 2 \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \theta - \frac{1}{2} t \sin \theta \\ 2s \sin \theta + t \cos \theta \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (s')^2 + \frac{(t')^2}{4} &= \left(s \cos \theta - \frac{1}{2} t \sin \theta \right)^2 + \frac{1}{4} (2s \sin \theta + t \cos \theta)^2 \\ &= s^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \frac{1}{4} t^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - st \cos \theta \sin \theta + st \sin \theta \cos \theta \\ &= s^2 + \frac{1}{4} t^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって、点 P' も C 上の点である。

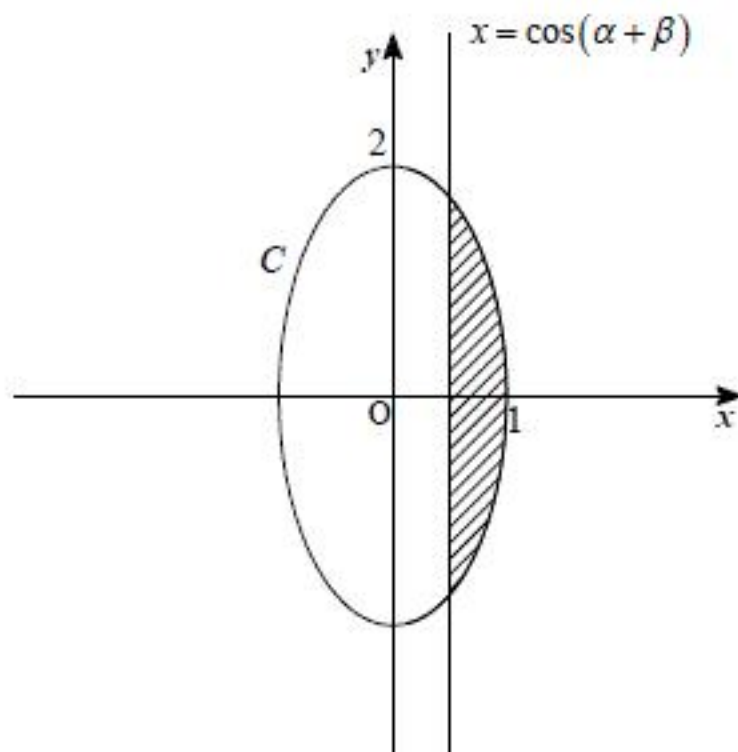
(証明終)

(2)

(1)より点 A の x 座標は

$$\cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha = \cos(\alpha + \beta)$$

である。 $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ であるから、 S は次図斜線部の面積である。



C の式は、 $y \geq 0$ において $y = 2\sqrt{1-x^2}$ と表せることから

$$S = 2 \int_{\cos(\alpha+\beta)}^1 2\sqrt{1-x^2} \, dx = 4 \int_{\cos(\alpha+\beta)}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$$

となる。 $x = \cos t$ と置換すると

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t$$

x	$\cos(\alpha + \beta)$	$\rightarrow$	1
t	$\alpha + \beta$	$\rightarrow$	0

となるから

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_{\cos(\alpha+\beta)}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \\ &= -4 \int_{\alpha+\beta}^0 \sin^2 t \cdot dt \\ &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\alpha+\beta} (1 - \cos 2t) \, dt \\ &= 2 \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\alpha+\beta} \\ &= 2(\alpha + \beta) - \sin 2(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

である。

(答) $S = 2(\alpha + \beta) - \sin 2(\alpha + \beta)$