

1

(1)

与式を変形すると

$$\begin{aligned}
 & 2\cos^2 \alpha - 2\sqrt{2} \cos \alpha + 1 \\
 &= (\sqrt{2} \cos \alpha - 1)^2 \\
 &= 0 \\
 &\therefore \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq \alpha \leq \pi$ より

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

となる。三角関数の合成を用いて、2番目の与式を変形すると

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta \\
 &= 2 \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) \\
 &= 2 \cos \alpha \\
 &\therefore \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

となる。ここで $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より

$$\theta = \frac{\pi}{12}$$

が求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \theta = \frac{\pi}{12}$$

(2)

解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2a+3 = \log_2 b + \log_2 2b = 1+2\log_2 b \\ a+2 = \log_2 b \cdot \log_2 2b = \log_2 b (1+\log_2 b) \end{cases}$$

となる。 $B = \log_2 b$ とおいて変形すると

$$\begin{cases} 2a+3 = 1+2B & \cdots \text{①} \\ a+2 = B^2+B & \cdots \text{②} \end{cases}$$

となり、②×2 - ①から a を消去して

$$1 = 2B^2 - 1$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 & B = \pm 1 \\
 & \therefore b = 2, \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

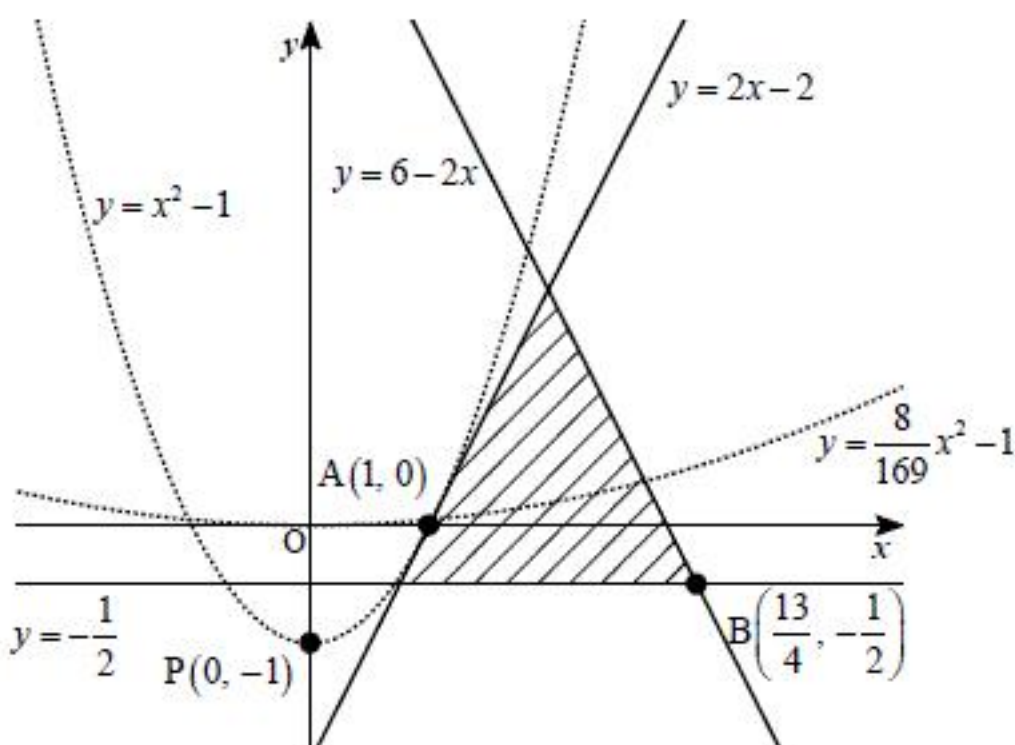
となる。②式に代入することで

$$a = 0, -2$$

が求められる。

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (0, 2), \left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

(3)

領域 D を図示すると下図の斜線部のようになる。ここで放物線 $y = px^2 - 1$ は必ず点 $P(0, -1)$ を通ることに留意すると、この放物線の傾き (すなわち x^2 の係数である p) を変化させ、領域 D と交点を持つ範囲を考えればよい。

[1] 傾きが最大の時

放物線は $y = 2x - 2$ と点 $A(a, b)$ で接する。この時 $y' = 2px$ より

$$\begin{cases} b = pa^2 - 1 \\ b = 2a - 2 \\ 2pa = 2 \end{cases}$$

を満たす。これを解いて、 $(a, b) = (1, 0)$, $p = 1$ が求まる。

[2] 傾きが最小の時

放物線は $y = 6 - 2x$ と $y = -\frac{1}{2}$ の交点 $B\left(\frac{13}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ を通る。このとき

$$-\frac{1}{2} = p\left(\frac{13}{4}\right)^2 - 1 \quad \therefore p = \frac{8}{169}$$

が求まる。

以上[1], [2]より、求める定数 p の範囲は $\frac{8}{169} \leq p \leq 1$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{169} \leq p \leq 1$$

2

(1)

余弦定理より、求める内積は

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2\overline{OA} \cdot \overline{OB} \quad \therefore \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{13-k^2}{2}$$

となる。ここで内積の定義より

$$\cos \angle AOB = \frac{\overline{OA} \cdot \overline{OB}}{|\overline{OA}| |\overline{OB}|} = \frac{13-k^2}{12}$$

であり、 $-1 < \cos \angle AOB < 1$ より

$$-1 < \frac{13-k^2}{12} < 1$$

となる。ここで $k > 0$ より

$$1 < k < 5$$

が求められる。

$$(\text{答}) \quad \overline{OA} \cdot \overline{OB} = \frac{13-k^2}{2}, \quad 1 < k < 5$$

(2)

$AP \perp OB$ より

$$\begin{aligned} \overline{AP} \cdot \overline{OB} &= (\overline{OP} - \overline{OA}) \cdot \overline{OB} \\ &= s|\overline{OB}|^2 - \overline{OA} \cdot \overline{OB} \\ &= 9s - \frac{13-k^2}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。よって、 $s = \frac{13-k^2}{18}$ が求められる。

また、線分 AP の長さは

$$\begin{aligned} |\overline{AP}| &= \sqrt{|\overline{OA}|^2 - (s|\overline{OB}|)^2} \\ &= \sqrt{4 - \left(\frac{13-k^2}{6}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{-k^4 + 26k^2 - 25}}{6} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad s = \frac{13-k^2}{18}, \quad |\overline{AP}| = \frac{\sqrt{-k^4 + 26k^2 - 25}}{6}$$

(3)

$\overline{OR} = t\overline{OQ} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}t$ とおく。ただし t は実数である。ここで $k=4$ より

$$\overline{OA} \cdot \overline{OB} = -\frac{3}{2}, \quad s = -\frac{1}{6}$$

である。 $RP \perp OB$ より、

$$\begin{aligned} \overline{RP} \cdot \overline{OB} &= (\overline{OP} - \overline{OR}) \cdot \overline{OB} \\ &= s|\overline{OB}|^2 - \frac{t}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}) \cdot \overline{OB} \\ &= 9s - \frac{15}{4}t \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるので、

$$t = \frac{12}{5}s = -\frac{2}{5}$$

と求められる。よって求める線分 OR の長さは

$$\begin{aligned} |\overline{OR}|^2 &= \left(\frac{|\overline{OA}| + |\overline{OB}|}{2} t \right)^2 \\ &= \frac{t^2}{4} \left(13 - 2 \cdot \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{2}{5} \\ \therefore |\overline{OR}| &= \frac{\sqrt{10}}{5} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overline{OR}| = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

3

(1)

各放物線の方程式は

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1 \\ y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \end{cases}$$

と変形できる。2式より y を消去すると

$$\begin{aligned} x^2 + 2x &= x^2 - 2x + 2 \\ \therefore x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

が求まる。よって求める交点の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$ である。

$$(\text{答}) \begin{cases} y = (x+1)^2 - 1 \\ y = (x-1)^2 + 1 \end{cases}, \text{ 交点の座標 : } \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$$

(2)

 C_1 のある点 $P(p, p^2 + 2p)$ における接線は、 $y' = 2x + 2$ より

$$y = (2p+2)(x-p) + p^2 + 2p = (2p+2)x - p^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。これが C_2 の接線となる時、①式と C_2 の方程式は重解を持つ。2式より y を消去して

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + 2 &= (2p+2)x - p^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(p+2)x + p^2 + 2 &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が得られる。②式が重解を持つとき、②式の判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (p+2)^2 - (p^2 + 2) \\ &= 4p + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

を満たすので、 $p = -\frac{1}{2}$ と求まる。これを①式に代入して

$$y = x - \frac{1}{4}$$

が得られる。

$$(\text{答}) y = x - \frac{1}{4}$$

(3)

直線 ℓ と C_2 の交点は $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)$ である。よって求める面積は

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{ (x^2 + 2x) - \left(x - \frac{1}{4}\right) \right\} dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left\{ (x^2 - 2x + 2) - \left(x - \frac{1}{4}\right) \right\} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) dx \\ &= 2 \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \frac{9x}{4} \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \frac{2}{3}$$

4

(1)

問題文より A は

$$A \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

を満たす。これより

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)

 AP, PB をそれぞれ計算すると,

$$AP = \begin{pmatrix} 5-2a & 10-2b \\ 6-2a & 12-2b \end{pmatrix}, PB = \begin{pmatrix} 1 & 2m \\ a & mb \end{pmatrix}$$

となる。 $AP = PB$ より, 各成分を比較して

$$\begin{cases} 5-2a=1 & \cdots \textcircled{1} \\ 10-2b=2m & \cdots \textcircled{2} \\ 6-2a=a & \cdots \textcircled{3} \\ 12-2b=mb & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

が得られる。 $\textcircled{1}$ より $a=2$ で, これは $\textcircled{3}$ も満たす。 $\textcircled{2}, \textcircled{4}$ より m を消去して

$$\begin{aligned} 12-2b &= 5b-b^2 \\ \Leftrightarrow b^2-7b+12 &= 0 \\ \therefore (b, m) &= (3, 2), (4, 1) \end{aligned}$$

と求まる。ここで P は逆行列を持つことより,

$$\det P = b-2a = b-4 \neq 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

を満たす。 $\textcircled{5}$ より, $b=4$ は不適であることが分かる。よって $(b, m) = (3, 2)$ より

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (a, b, m) = (2, 3, 2), \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

 $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ であることを数学的帰納法により示す。[1] $n=1$ のとき

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{より, 成立する。}$$

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定したとき, $n=k+1$ のとき

$$B^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \text{より } B^{k+1} \text{ を計算すると}$$

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり, 成立する。

[1], [2]より, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ であることが数学的帰納法によって示された。ここで $AP = PB$ より $A = PBP^{-1}$ であることを利用すると

$$\begin{aligned} A^n &= (PBP^{-1})^n \\ &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 2-2^{n+1} \\ 3 \cdot 2^{n+1}-6 & 4-3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 2-2^{n+1} \\ 3 \cdot 2^{n+1}-6 & 4-3 \cdot 2^n \end{pmatrix}$$

(4)

 C_n の座標を (x, y) とおくと,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2^{n+2}-3 & 2-2^{n+1} \\ 3 \cdot 2^{n+1}-6 & 4-3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3-2^{n+1} \\ 6-3 \cdot 2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで x について

$$2^n = -\frac{x}{2} + \frac{3}{2}$$

より, n を消去して y を x で表すと

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

となり, これが直線 ℓ となり, C_n は n によらない直線上の点であることが示された。

(証明終)

$$(\text{答}) \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} P_{2n-1} = (k^{n-1}, k^{2n-2}) \\ P_{2n} = (-k^n, k^{2n}) \end{cases} \quad \dots \quad \textcircled{1}$$

であることを数学的帰納法により示す。

[1] $n=1$ のとき

$P_1 = (1, 1)$ より, ①を満たす。

P_1 と点 $(0, k)$ を通る直線の方程式は

$$y = (1-k)x + k \quad \dots \quad \textcircled{2}$$

である。②と放物線 C との交点の x 座標は, $y = x^2$ から y を消去して

$$\begin{aligned} x^2 &= (1-k)x + k \\ \Leftrightarrow x^2 - (1-k)x - k &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(x+k) &= 0 \\ \therefore x &= 1, -k \end{aligned}$$

となる。 P_2 は P_1 と異なる点より, $P_2 = (-k, k^2)$ であり, これも①を満たす。

[2] $n=m$ のとき成立すると仮定したとき, $n=m+1$ のとき

$P_{2m} = (-k^m, k^{2m})$ であるとき, P_{2m} と点 $(0, k^{2m})$ を通る直線の方程式は

$$y = k^{2m} \quad \dots \quad \textcircled{3}$$

P_{2m+1} は P_{2m} と異なる点であることと③より, $P_{2m+1} = (k^m, k^{2m})$ であり, ①を満たす。

次に, P_{2m+1} と点 $(0, k^{2m+1})$ を通る直線の方程式は

$$y = (k^m - k^{m+1})x + k^{2m+1} \quad \dots \quad \textcircled{4}$$

④と放物線 C との交点の x 座標は, $y = x^2$ から y を消去して

$$\begin{aligned} x^2 &= (k^m - k^{m+1})x + k^{2m+1} \\ \Leftrightarrow x^2 - (k^m - k^{m+1})x - k^{2m+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - k^m)(x + k^{m+1}) &= 0 \\ \therefore x &= k^m, -k^{m+1} \end{aligned}$$

となる。 P_{2m+2} は P_{2m+1} と異なる点より, $P_{2m+2} = (-k^{m+1}, k^{2m+2})$ であり, これも①を満たす。

以上[1], [2]より,

$$\begin{cases} P_{2n-1} = (k^{n-1}, k^{2n-2}) \\ P_{2n} = (-k^n, k^{2n}) \end{cases}$$

であることが数学的帰納法によって示された。

$$(\text{答}) \begin{cases} P_{2n-1} = (k^{n-1}, k^{2n-2}) \\ P_{2n} = (-k^n, k^{2n}) \end{cases}$$

(1)の結果より

$$\begin{aligned} l_{2n-1}^2 &= (-k^n - k^{n-1})^2 + (k^{2n} - k^{2n-2})^2 \\ &= k^{4n} - 2k^{4n-2} + k^{4n-4} + k^{2n} + 2k^{2n-1} + k^{2n-2} \\ &= \left(1 - \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right)k^{4n} + \left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)k^{2n} \end{aligned}$$

であり, また

$$l_{2n}^2 = (k^n + k^n)^2 = 4k^{2n}$$

である。

$$(\text{答}) \quad l_{2n-1}^2 = \left(1 - \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right)k^{4n} + \left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)k^{2n}, \quad l_{2n}^2 = 4k^{2n}$$

$k = \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} l_n^2 &= \sum_{m=1}^{\infty} (l_{2m-1}^2 + l_{2m}^2) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{2}{k^2} + \frac{1}{k^4}\right)k^{4m} + \left(1 + \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}\right)k^{2m} + 4k^{2m} \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{9}{16} \left(\frac{1}{16}\right)^{m-1} + \frac{13}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{m-1} \right\} \\ &= \frac{9}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{16}} + \frac{13}{4} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{74}{15} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{74}{15}$$

6

(1)

求める値は

$$\begin{aligned}
 l^2 &= \left\{ 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) \right\}^2 + 4 \sin^2 t \\
 &= (\sin t + \sqrt{3} \cos t)^2 + 4 \sin^2 t \\
 &= 5 \sin^2 t + 3 \cos^2 t + 2\sqrt{3} \sin t \cos t \\
 &= 3 + 2 \sin^2 t + 2\sqrt{3} \sin t \cos t \\
 &= 4 - \cos 2t + \sqrt{3} \sin 2t \\
 &= 4 + 2 \sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right)
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 4 + 2 \sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right)$$

(2)

(1)の結果から、 l^2 は $-1 \leq \sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$ より、 $2 \leq l^2 \leq 6$ を満たす。よって l^2 が最大値をとる時の最小の t は

$$\sin \left(2t - \frac{\pi}{6} \right) = 1 \quad \therefore t = \frac{\pi}{3}$$

となる。このとき、

$$x = 2 \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}, \quad y = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

であるから、

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

となる。また、長軸の長さは

$$2 \cdot l_{\max} = 2\sqrt{6}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{長軸の長さ: } 2\sqrt{6}, \quad \theta = \frac{\pi}{4}$$

(3)

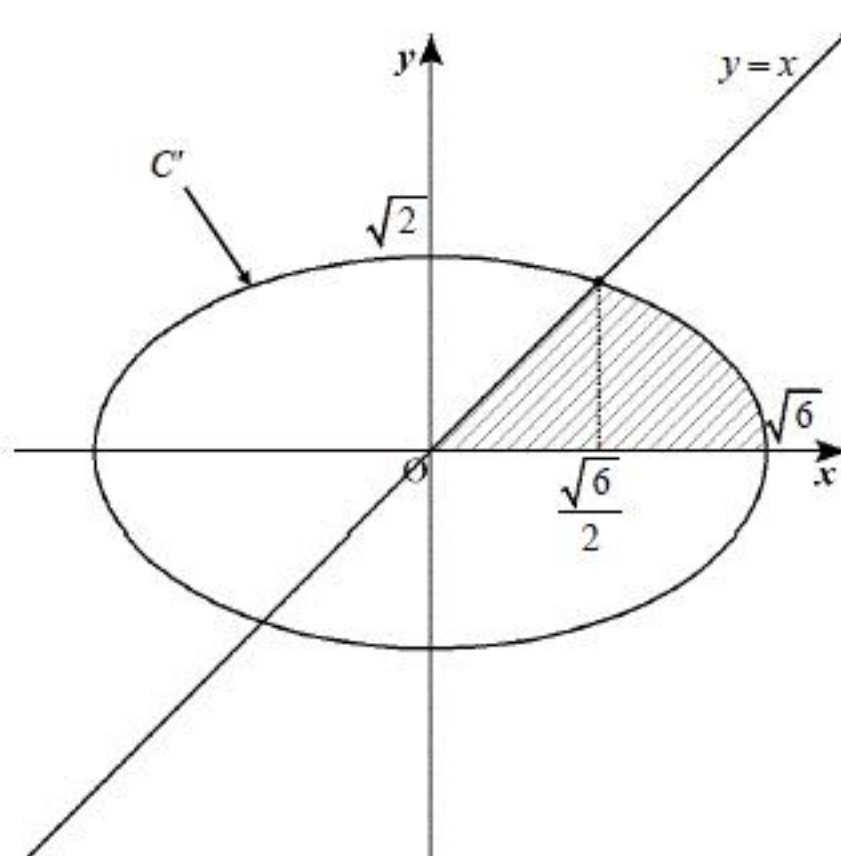
楕円 C を原点周りに $-\frac{\pi}{4}$ だけ回転したときにできる楕円 C' について考える。楕円 C 上の点を (x, y) 、楕円 C' 上の点を (X, Y) とすると、

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) & -\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) & \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin t \\ 2 \sin \left(t + \frac{\pi}{3} \right) - 2 \sin t \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{6} \sin \left(t + \frac{\pi}{6} \right) \\ \sqrt{2} \cos \left(t + \frac{\pi}{6} \right) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

と表される。したがって、楕円 C' は方程式

$$\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm \left(2 - \frac{x^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

が表す楕円である。したがって、求める図形の面積は、次図の斜線部を2倍したものに等しい。

また、楕円 C' と直線 $y=x$ の第一象限における交点の座標は、

$$\frac{x^2}{6} + \frac{x^2}{2} = 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$$

より、 $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2} \right)$ である。したがって、前図の斜線部の面積は

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} + \int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}} \left(2 - \frac{x^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} dx &= \frac{3}{4} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(2 - \frac{(\sqrt{6} \sin \theta)^2}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{6} \cos \theta d\theta \\
 &= \frac{3}{4} + 2\sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{3}{4} + 2\sqrt{3} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= \frac{3}{4} + 2\sqrt{3} \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi
 \end{aligned}$$

となる。ただし途中で $x = \sqrt{6} \sin \theta$ と置換した。以上から、求める面積は

$$2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$