

問題 1

(1)

$\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b}$ より,

$$\begin{aligned} |\vec{p}|^2 &= |3\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ &= 9|\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= 9 \cdot 1 - 6 \cdot 3 + 25 \\ &= 16 \end{aligned}$$

となり, $|\vec{p}| \geq 0$ であるから,

$$|\vec{p}| = 4$$

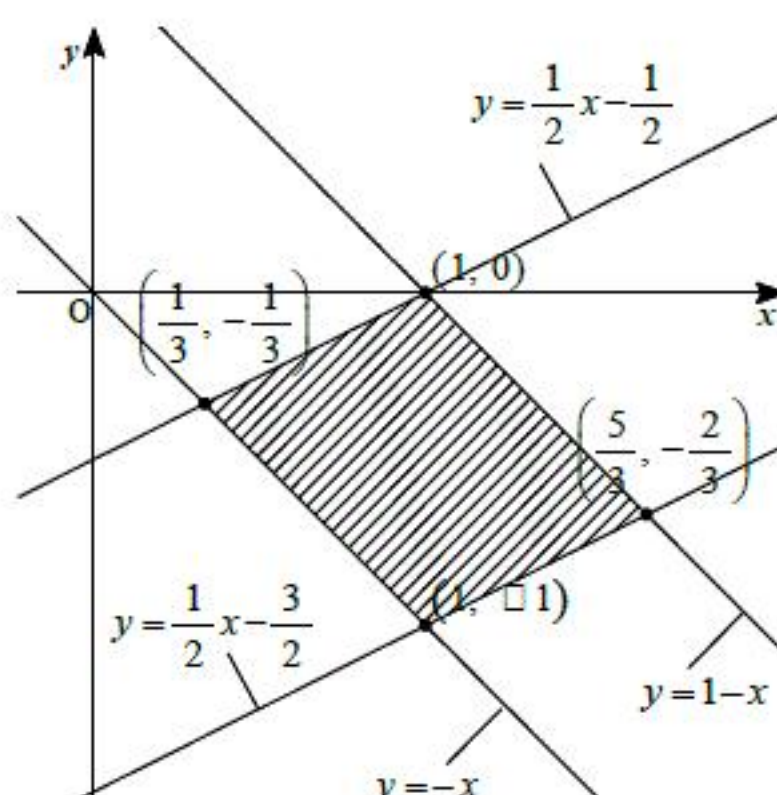
とわかる。

(答) 4

(2)

$$\begin{cases} 1 \leq x - 2y \leq 3 \\ 0 \leq x + y \leq 1 \end{cases}$$

を図示すると, 以下のようになる。



(答) 前図

(3)

与式より,

$$\begin{aligned} 3\sin\theta - 1 &< \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow 3\sin\theta - 1 &< 1 - 2\sin^2\theta \\ \Leftrightarrow 2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 &< 0 \\ \Leftrightarrow (\sin\theta + 2)(2\sin\theta - 1) &< 0 \\ \Leftrightarrow -2 < \sin\theta < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

と, $\sin\theta$ について解ける。 $0 \leq \theta < 2\pi$ より, 求める θ の範囲は,

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < \theta < 2\pi$$

とわかる。

(答) $0 \leq \theta < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < \theta < 2\pi$

(4)

点 P の座標を (t, t^3) とおく。このとき,

$$\vec{BA} = (2, 2)$$

$$\vec{BP} = (t+1, t^3+1)$$

である。よって, $\triangle ABP$ の面積 $S(t)$ は,

$$\begin{aligned} S(t) &= \frac{1}{2} |2(t^3+1) - 2(t+1)| \\ &= |t^3 - t| \\ &= |t(t+1)(t-1)| \\ &= -t^3 + t \quad (\because 0 < t < 1) \end{aligned}$$

となり, $0 < t < 1$ において,

$$S'(t) = -3t^2 + 1 = -3 \left(t + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \left(t - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

である。よって, 増減表は以下のようになる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	...	1
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	

ゆえに, $S(t)$ の最大値は, $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ とわかる。

(答) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$

問題 2

(1)

P, Q の座標は、それぞれ (a, a^2) , $(a+h, (a+h)^2)$ であるため、直線 l の傾きは、

$$\frac{(a+h)^2 - a^2}{(a+h) - a} = 2a+h$$

よって、直線 l の方程式は、

$$y = (2a+h)x + k \quad (k: \text{定数})$$

と表すことができる。これが、 $y = x^2$ と接するとき、

$$\begin{aligned} x^2 &= (2a+h)x + k \\ \Leftrightarrow x^2 - (2a+h)x - k &= 0 \end{aligned}$$

となり、これが重解を持つので、判別式を D として、

$$\begin{aligned} D &= (2a+h)^2 - 4 \cdot (-k) = 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\left(a + \frac{h}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

である。よって、求める直線 l の方程式は、

$$y = (2a+h)x - \left(a + \frac{h}{2}\right)^2$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad y = (2a+h)x - \left(a + \frac{h}{2}\right)^2$$

(2)

直線 PQ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (2a+h)(x-a) + a^2 \\ \Leftrightarrow y &= (2a+h)x - a^2 - ah \end{aligned}$$

である。よって、 A_1 は、

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_a^{a+h} \{(2a+h)x - a^2 - ah - x^2\} dx \\ &= -\int_a^{a+h} (x-a) \{x - (a+h)\} dx \\ &= \frac{1}{6} \{(a+h) - a\}^3 \\ &= \frac{h^3}{6} \end{aligned}$$

である。また、(1)より R の y 座標は、

$$PR = a^2 - \left\{ (2a+h) \cdot a - \left(a + \frac{h}{2}\right)^2 \right\} = \frac{h^2}{4}$$

なので、四角形 PRSQ が平行四辺形であることに注意して、

$$\begin{aligned} A_2 &= \frac{h^2}{4} \cdot \{(a+h) - a\} \\ &= \frac{h^3}{4} \end{aligned}$$

である。よって、

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{h^3}{6}}{\frac{h^3}{4}} = \frac{2}{3}$$

となり、 $\frac{A_1}{A_2}$ が a, h によらず一定となることが示された。

(証明終)

問題 3

(1)

$$na_{n+1} = 3(n+1)a_n + 2n(n+1) \quad \dots \textcircled{1}$$

に、 $n=1$ を代入すると、

$$a_2 = 3 \cdot 2 \cdot a_1 + 2 \cdot 1 \cdot 2$$

となり、 $a_1 = 3$ なので、

$$a_2 = 3 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 2 = 22$$

である。次に、 $\textcircled{1}$ に $n=2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 2a_3 &= 3 \cdot 3 \cdot a_2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 210 \\ \Leftrightarrow a_3 &= 105 \end{aligned}$$

でとなる。

(答) $a_2 = 22, a_3 = 105$

(2)

$\textcircled{1}$ の両辺を $n(n+1)$ でわると、

$$\frac{a_{n+1}}{n+1} = 3 \cdot \frac{a_n}{n} + 2$$

となる。ここで、 $b_n = \frac{a_n}{n}$ とおくと、

$$b_{n+1} = 3b_n + 2$$

となる。

(答) $b_{n+1} = 3b_n + 2$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 3b_n + 2 \\ \Leftrightarrow b_{n+1} + 1 &= 3(b_n + 1) \end{aligned}$$

である。よって、数列 $\{b_n + 1\}$ は、初項 $b_1 + 1 = 3 + 1 = 4$ 、公比3の等比数列となり、

$$\begin{aligned} b_n + 1 &= 4 \cdot 3^{n-1} \\ \Leftrightarrow b_n &= 4 \cdot 3^{n-1} - 1 \\ \Leftrightarrow a_n &= (4 \cdot 3^{n-1} - 1)n \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $a_n = (4 \cdot 3^{n-1} - 1)n$

(4)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (4 \cdot 3^{k-1} - 1)k \\ &= 4 \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \cdot k - \sum_{k=1}^n k \end{aligned}$$

と表わされる。ここで、 $S_n = \sum_{k=1}^n 3^{k-1} \cdot k$ とおくと、

$$\begin{aligned} 3S_n - S_n &= -(3^0 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) + n \cdot 3^n \\ \Leftrightarrow S_n &= \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= 4 \cdot \frac{(2n-1) \cdot 3^n + 1}{4} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= (2n-1) \cdot 3^n - \frac{1}{2}n(n+1) + 1 \end{aligned}$$

である。

(答) $(2n-1) \cdot 3^n - \frac{1}{2}n(n+1) + 1$