

【解答】

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad f(x) = f(x+p) \quad \boxed{\text{イ}} \quad \frac{\pi}{5}$$

$$(2) \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \quad \boxed{\text{エ}} \quad \frac{\sin x}{1 - \sin x}$$

$$(3) \quad \boxed{\text{オ}} \quad \log \frac{11}{6} \quad \boxed{\text{カ}} \quad 11 \log 11 - 10$$

$$(4) \quad \boxed{\text{キ}} \quad (-2, 5 + \sqrt{5}) \quad \boxed{\text{ク}} \quad 6$$

$$(5) \quad \boxed{\text{ケ}} \quad \frac{2}{n} \left(\frac{k-1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n} \quad \boxed{\text{コ}} \quad \frac{2}{n}$$

【解説】

(1)

関数 $f(x)$ が p を周期とする周期関数であるとき、

$$f(x) = f(x+p)$$

である。また、 $g(x) = \sin^2 \left(5x + \frac{\pi}{3} \right)$ の周期は、 $\cos 2x$ の周期は π であることより、 $\frac{\pi}{5}$ である。

(2)

 $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^k x$ が収束するには、

$$|\sin x| < 1$$

である必要がある。 $-\pi < x \leq \pi$ であるので、

$$x \neq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

となる。このとき、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \sin^k x &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin x (\sin x)^{k-1} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sin x \cdot \frac{1 - \sin^k x}{1 - \sin x} \right) \\ &= \frac{\sin x}{1 - \sin x} - \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin^k x}{1 - \sin x} \\ &= \frac{\sin x}{1 - \sin x} \quad (\because |\sin x| < 1) \end{aligned}$$

である。

(3)

$$\begin{aligned} \int_{-10}^0 \frac{1}{(x+11)(x+12)} dx &= \int_{-10}^0 \left(\frac{1}{x+11} - \frac{1}{x+12} \right) dx \\ &= [\log|x+11| - \log|x+12|]_{-10}^0 \\ &= \log \frac{11}{6} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \int_{-10}^0 \log(x+11) dx &= [(x+11)(\log|x+11| - 1)]_{-10}^0 \\ &= 11(\log 11 - 1) + 1 \\ &= 11 \log 11 - 10 \end{aligned}$$

である。

(4)

与式より、楕円の式は、

$$\begin{aligned} 9(x+2)^2 + 4(y-5)^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-5)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

である。よって、この楕円の焦点は、 $(-2, 5 \pm \sqrt{5})$ とわかる。このうち、 y 座標が大きいのは、 $(-2, 5 + \sqrt{5})$ である。また、長軸の長さは、6 である。

(5)

題意より、求める左端を基準に選んだ時の小区間の面積は、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right) = \frac{2}{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}$$

である。同様に右端を基準に選んだ時の小区間の面積は、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{2}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}$$

である。よって、

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f\left(\frac{k-1}{n}\right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{n^3} (2k-1) \\ &= \frac{2}{n^3} \cdot \left\{ 2 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) - n \right\} \\ &= \frac{2}{n} \end{aligned}$$

(2

(1)

条件より,

$$f(x) = P(x)(x-1) + 3$$

$$f(x) = Q(x)(x-2) + 2$$

とおくことができる。ただし, $P(x)$, $Q(x)$ は任意の x の関数とする。すると,

$$f(x) = R(x)(x-1)(x-2) + ax + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

ともおける。このとき, $R(x)$ は任意の x の関数である。①式に $x=1, 2$ をそれぞれ代入すると,

$$f(1) = a + b = 3$$

$$f(2) = 2a + b = 2$$

となるので, 連立方程式を解き,

$$a = -1$$

$$b = 4$$

とわかる。よって, 求める余りは, $-x+4$ である。(答) $-x+4$

(2)

真数条件より,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 > 0, x^2 - 6x + 8 > 0 \\ \Leftrightarrow x < 1, x > 4 \end{aligned}$$

である。与式より,

$$0 < \log \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8} < \log 2$$

となる。 $y = \log x$ は, $x > 0$ で単調増加なので,

$$1 < \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} < 2$$

である。まず,

$$1 < \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 < x^2 - 4x + 3$$

$$\Leftrightarrow -2x + 5 < 0$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$

とわかる。次に,

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8} < 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 < 2(x^2 - 6x + 8)$$

$$\Leftrightarrow 0 < x^2 - 8x + 13$$

$$\Leftrightarrow x < 4 - \sqrt{3}, 4 + \sqrt{3} < x$$

とわかる。よって,

$$4 + \sqrt{3} < x$$

となる。

(答) $4 + \sqrt{3} < x$

(3)

このとき,

$$f'(x) = 2x - e^{-x} \int_0^x f'(t) e^t dt + e^{-x} f'(x) e^x$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \int_0^x f'(t) e^t dt = 2x$$

であるから,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + \int_0^x f'(t) e^{t-x} dt \\ &= x^2 + 2x \end{aligned}$$

となる。

(答) $x^2 + 2x$

点 B の座標は $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$ とおける。このとき直線 l_1 の方程式は、

$$\sin \theta \cdot x - \cos \theta \cdot y = 0$$

である。また、線分 AB の中点は、 $\left(\frac{\cos \theta + x_0}{2}, \frac{\sin \theta}{2}\right)$ であり、直線 l_2 の法線ベクトルは、

$(\cos \theta - x_0, \sin \theta)$ なので、直線 l_2 の方程式は、

$$(\cos \theta - x_0) \left(x - \frac{\cos \theta + x_0}{2} \right) + \sin \theta \left(y - \frac{\sin \theta}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos \theta - x_0)x + \sin \theta \cdot y = \frac{1 - x_0^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta \cdot x + \sin \theta \cdot y = x_0 x + \frac{1}{2}(1 - x_0^2)$$

と表すことができる。点 P の座標を (X, Y) とおくと、2 直線 l_1, l_2 上にあるので、

$$\begin{cases} \sin \theta \cdot X - \cos \theta \cdot Y = 0 \\ \cos \theta \cdot X + \sin \theta \cdot Y = x_0 X + \frac{1}{2}(1 - x_0^2) \end{cases}$$

となり、それぞれ 2 乗すると、

$$\begin{cases} \sin^2 \theta \cdot X^2 - 2 \cos \theta \sin \theta + \cos^2 \theta \cdot Y^2 = 0 \\ \cos^2 \theta \cdot X^2 + 2 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta \cdot Y^2 = \left\{ x_0 X + \frac{1}{2}(1 - x_0^2) \right\}^2 \end{cases}$$

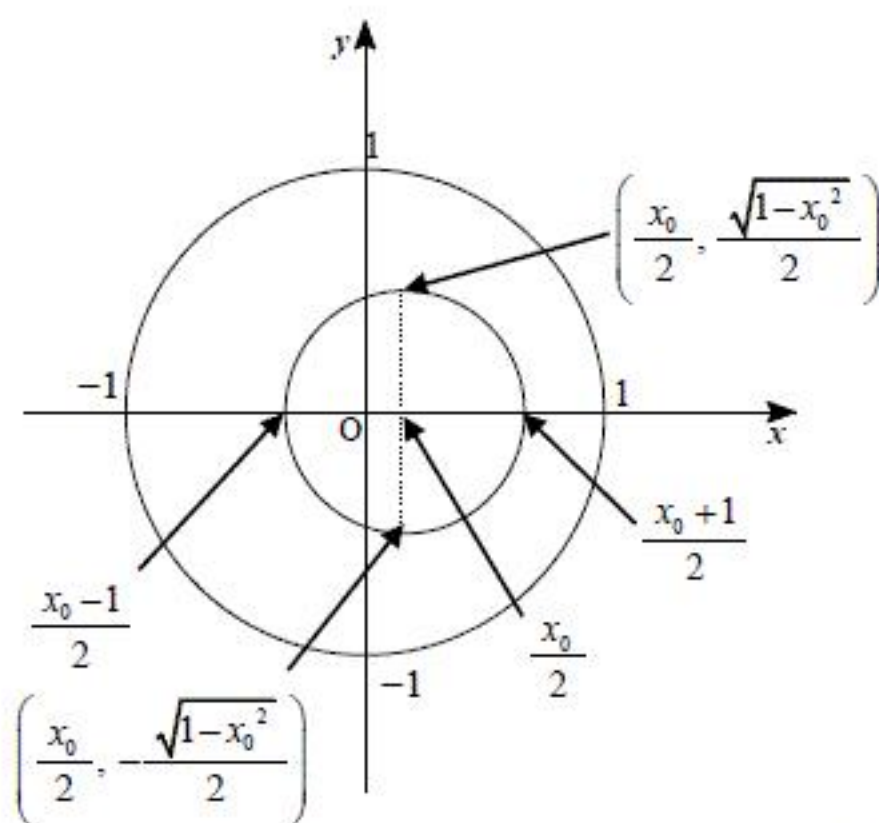
となる。この 2 式を足すと、

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \left\{ x_0 X + \frac{1}{2}(1 - x_0^2) \right\}^2 \\ \Leftrightarrow (1 - x_0^2) X^2 + Y^2 - (1 - x_0^2) x_0 X - \frac{1}{4}(1 - x_0^2)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1 - x_0^2) \left(X - \frac{x_0}{2} \right)^2 + Y^2 &= \frac{1 - x_0^2}{4} \\ \Leftrightarrow 4 \left(X - \frac{x_0}{2} \right)^2 + \frac{4}{1 - x_0^2} Y^2 &= 1 \end{aligned}$$

となり、求める P の軌跡は、

$$4 \left(x - \frac{x_0}{2} \right)^2 + \frac{4}{1 - x_0^2} y^2 = 1$$

となる。また、図示すると、以下のようになる。



(答) $4 \left(x - \frac{x_0}{2} \right)^2 + \frac{4}{1 - x_0^2} y^2 = 1$, 前図

4

(1)

与式より、まず $n=1$ を代入すると、

$$S_1 = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$$

となる。また、 $n=2$ を代入すると、

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^\pi \sin^2 x dx \\ &= \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = 2, \quad S_2 = \frac{\pi}{2}$$

(2)

$$\begin{aligned} (\sin^{n+1} x \cdot \cos x)' &= (n+1) \sin^n x \cdot \cos^2 x - \sin^{n+2} x \\ &= (n+1) \sin^n x - (n+2) \sin^{n+2} x \end{aligned}$$

となるので、これを区間 $[0, \pi]$ で積分し、

$$\begin{aligned} [\sin^{n+1} x \cdot \cos x]_0^\pi &= (n+1) \int_0^\pi \sin^n x dx - (n+2) \int_0^\pi \sin^{n+2} x dx \\ \Leftrightarrow 0 &= (n+1) S_n - (n+2) S_{n+2} \\ \Leftrightarrow \frac{S_{n+2}}{S_n} &= \frac{(n+1)}{(n+2)} \end{aligned}$$

となる。

証明終

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n-1}{n} S_{n-2} \\ &= \dots \\ &= \begin{cases} \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{2}{3} S_1 & (n=2k-1) \\ \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \dots \frac{3}{4} S_2 & (n=2k) \end{cases} \end{aligned}$$

となる(k は1以上の整数とする)。

[1] $n=2k$ のとき

$$n S_n S_{n+1} = \frac{2n}{n+1} S_1 S_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi$$

[2] $n=2k-1$ のとき

$$n S_n S_{n+1} = \frac{2n}{n+1} S_1 S_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2\pi$$

となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n S_{n+1} = 2\pi$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n S_n S_{n+1} = 2\pi$$

(1)

与式より,

$$\begin{aligned}
 MM' &= M'M \\
 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+bb' & b'+b(1-a') \\ b+b'(1-a) & bb'+(1-a)(1-a') \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+bb' & b+b'(1-a) \\ b'+b(1-a') & bb'+(1-a)(1-a') \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow b'+b(1-a') &= b+b'(1-a) \\
 \Leftrightarrow a'b &= ab'
 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) $a'b = ab'$

(2)

行列 P は回転行列なので,

$$\begin{aligned}
 P^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。よって、以下 $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$ とおくと,

$$\begin{aligned}
 P^{-1}MP &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c+bs & bc+(1-a)s \\ bc-s & (1-a)c-bs \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} c^2+2bcs+(1-a)s^2 & bc^2-acs-bs^2 \\ bc^2-acs-bs^2 & (1-a)c^2-2bcs+s^2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。これが, 対角行列になるので,

$$\begin{aligned}
 bc^2-acs-bs^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow cs &= \frac{b}{a}(c^2-s^2)
 \end{aligned}$$

である。ゆえに,

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot \frac{s}{c}}{1 - \left(\frac{s}{c}\right)^2} = \frac{2cs}{c^2 - s^2} = \frac{2b}{a}$$

である。

(答) $\frac{2b}{a}$

(3)

$P^{-1}MP$ の $(1, 2)$, $(2, 1)$ 成分は, $b'c^2 - a'cs - b's^2$ である。これは,

$$\begin{aligned}
 b'c^2 - a'cs - b's^2 &= b'(c^2 - s^2) - a' \cdot \frac{b}{a}(c^2 - s^2) \\
 &= (c^2 - s^2) \left(b' - \frac{a'b}{a} \right) \\
 &= \frac{c^2 - s^2}{aa'} (ab' - a'b) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

である。よって, $P^{-1}MP$ は対角行列である。

証明終