

問題 1

(1)

高度が 850m 上昇するごとに大気圧は $\frac{9}{10}$ 倍される。よって、山頂での大気圧を x とおくと、

$$\begin{aligned} x &= 990 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{3776-376}{850}} \\ &= 990 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^4 \\ &= 649.539 \end{aligned}$$

と計算できる。小数第 1 位を四捨五入して、 $x = 650\text{hPa}$ が求める大気圧となる。

(答) 650hPa

(2)

A の売り値を x ($200 \leq x \leq 350$) とおく。売り値を 10 円下げるとに N は 5 ずつ増えることから、 K を定数として、

$$N = -\frac{1}{2}x + K$$

が成り立つ。題意より、 $(x, N) = (350, 35)$ のときにこの式が成り立つことから、 $K = 210$ とわかる。ここで、売り上げ全体の利益を M とおくと、

$$\begin{aligned} M &= (x - 200) \cdot N \\ &= (x - 200) \cdot \left(-\frac{x}{2} + 210\right) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 310x - 42000 \\ &= -\frac{1}{2}(x - 310)^2 + 6050 \end{aligned}$$

と平方完成できる。よって M は $x = 310$ のとき最大となり、そのときの N の値は、

$$N = -\frac{310}{2} + 210 = 55$$

と求められる。

(答) 売り値: 310 円, $N = 55$

(3)

$\log_4 7$ の底を 2 にそろえると、

$$\begin{aligned} \log_4 7 &= \frac{\log_2 7}{\log_2 4} \\ &= \log_2 \sqrt{7} \\ &< \log_2 3 \end{aligned}$$

とわかる。また、 $\log_8 28$ の底を 2 にそろえると、

$$\begin{aligned} \log_8 28 &= \frac{\log_2 28}{\log_2 8} \\ &= \log_2 28^{\frac{1}{3}} \\ &> \log_2 27^{\frac{1}{3}} \\ &= \log_2 3 \end{aligned}$$

とわかる。したがって $\log_4 7 < \log_2 3 < \log_8 28$ となる。

(答) $\log_4 7 < \log_2 3 < \log_8 28$

(4)

$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, -1, -1)$, $\overrightarrow{AP} = (1, 2, z-1)$ である。点 P が平面 α 上にあるとき、 $\overrightarrow{AP}$ は実数 s, t を用いて $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ と書ける。 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ は一次独立であるから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} &= s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} \\ \Leftrightarrow (1, 2, z-1) &= (-s-2t, s-t, 2s-t) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -s-2t=1 \\ s-t=2 \\ 2s-t=z-1 \end{cases} \end{aligned}$$

と s, t, z についての 3 つの方程式が得られる。これを連立して解くと、 $(s, t, z) = (1, -1, 4)$ とわかる。

(答) $z = 4$

問題 2

(1)

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) \\ &= x(x-1)(x-1-a) \end{aligned}$$

となる。 $f(x)$ と $g(x)$ の交点の x 座標は、等式 $f(x) = g(x)$ の解であるから、

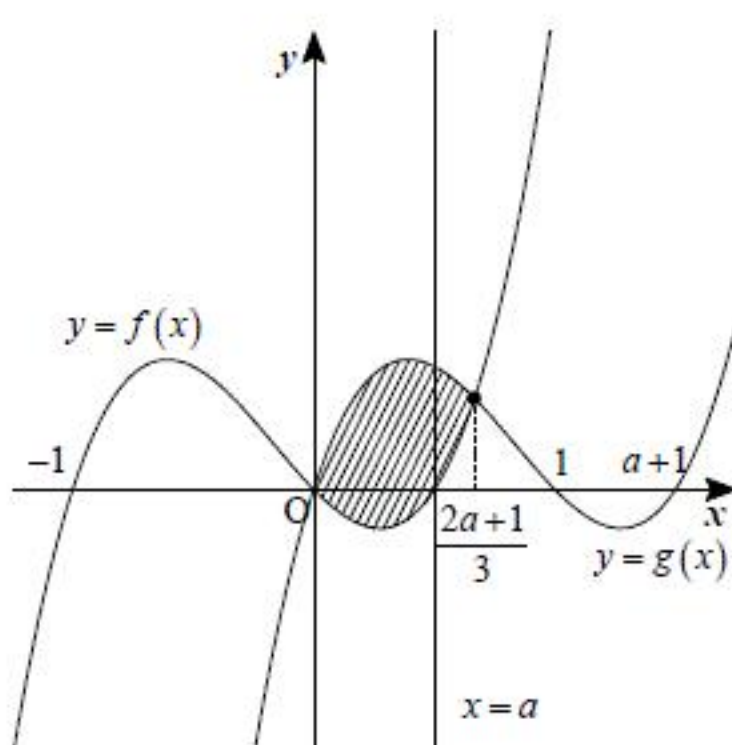
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow (x+1)x(x-a) &= x(x-1)(x-1-a) \\ \Leftrightarrow x\{(x+1)(x-a) - (x-1)(x-1-a)\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x(3x-2a-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 0, \frac{2a+1}{3} \end{aligned}$$

と求められる。

$$(\text{答}) \quad x = 0, \frac{2a+1}{3}$$

(2)

A を図示すると、下図の斜線部分となる。



上図より、 A の面積 $S(a)$ は、

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\frac{2a+1}{3}} \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^{\frac{2a+1}{3}} x(-3x+2a+1) dx \\ &= \left[-x^3 + \frac{1}{2}(2a+1)x^2 \right]_0^{\frac{2a+1}{3}} \\ &= \frac{(2a+1)^3}{54} \end{aligned}$$

と計算できる。また、

$$\begin{aligned} S_1(a) &= \int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_0^a x(-3x+2a+1) dx \\ &= \left[-x^3 + \frac{1}{2}(2a+1)x^2 \right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = \frac{(2a+1)^3}{54}, \quad S_1(a) = \frac{a^2}{2}$$

(3)

$S_2(a)$ を求めると、

$$\begin{aligned} S_2(a) &= S(a) - S_1(a) \\ &= \frac{(2a+1)^3}{54} - \frac{a^2}{2} \\ &= \frac{1}{54}(8a^3 - 15a^2 + 6a + 1) \end{aligned}$$

となる。これを a で微分すると、

$$\begin{aligned} S_2'(a) &= \frac{1}{9}(4a^2 - 5a + 1) \\ &= \frac{1}{9}(4a-1)(a-1) \end{aligned}$$

となる。よって増減表は以下の通りとなる。

a	0		$\frac{1}{4}$		1
$S_2'(a)$	+	+	0	-	0
$S_2(a)$		↗	極大	↘	

増減表より、 $S_2(a)$ は $a = \frac{1}{4}$ で最大となり、その最大値は、

$$\begin{aligned} S_2\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{54}\left(\frac{1}{8} - \frac{15}{16} + \frac{3}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{32} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{4}, \quad \text{最大値} \frac{1}{32}$$

問題 3

与えられた条件より,

$$P_{n+2}(x) = 2xP_{n+1}(x) + (1-x^2)P_n(x) \quad \cdots (\ast)$$

が $n=1, 2, 3, \dots$ で成り立っている。

(1)

($\ast$)に $n=1$ を代入すると,

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 2xP_2(x) + (1-x^2)P_1(x) \\ &= 2x \cdot (x^2+1) + (1-x^2) \cdot x \\ &= x^3 + 3x \end{aligned}$$

とわかる。また, ($\ast$)に $n=2$ を代入すると,

$$\begin{aligned} P_4(x) &= 2xP_3(x) + (1-x^2)P_2(x) \\ &= 2x \cdot (x^3+3x) + (1-x^2) \cdot (x^2+1) \\ &= x^4 + 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad P_3(x) = x^3 + 3x, \quad P_4(x) = x^4 + 6x^2 + 1$$

(2)

($\ast$)に $x=1$ を代入すると,

$$P_{n+2}(1) = 2P_{n+1}(1)$$

が得られる。 $P_1(1)=1$, $P_2(1)=2$ より, $\{P_n(1)\}$ は初項 $P_1(1)=1$, 公比 2 の等比数列とみなせる。

よって, $P_n(1) = 2^{n-1}$ となる。

$$(\text{答}) \quad P_n(1) = 2^{n-1}$$

(3)

($\ast$)に $x=0$ を代入すると,

$$P_{n+2}(0) = P_n(0)$$

が得られる。すなわち, $\{P_n(0)\}$ は 1 つおきに同じ項が並ぶ数列とみなせる。 k を自然数とす

ると, $P_1(0)=0$, $P_2(0)=1$ であるから, $n=2k-1$ のとき $P_n(0)=0$, $n=2k$ のとき $P_n(0)=1$ となる。

$$(\text{答}) \quad n=2k-1 \text{ のとき } P_n(0)=0, \quad n=2k \text{ のとき } P_n(0)=1 \quad (k \text{ は自然数})$$

(4)

($\ast$)に $x=2$ を代入すると,

$$P_{n+2}(2) = 4P_{n+1}(2) - 3P_n(2) \quad \cdots (\star)$$

が得られる。これを隣接 3 項間の漸化式と考えて解く。この漸化式の特性方程式は $x^2 - 4x + 3 = 0$ であり, これを解くと $x=1, 3$ である。したがって($\star$)は,

$$(\star) \Leftrightarrow P_{n+2}(2) - 3P_{n+1}(2) = P_{n+1}(2) - 3P_n(2) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(\star) \Leftrightarrow P_{n+2}(2) - P_{n+1}(2) = 3\{P_{n+1}(2) - P_n(2)\} \quad \cdots \textcircled{2}$$

と 2 通りに表せる。①より, $\{P_{n+1}(2) - 3P_n(2)\}$ は n によらず常に一定の値をとることから,

$$\begin{aligned} P_{n+1}(2) - 3P_n(2) &= P_2(2) - 3P_1(2) \\ &= 5 - 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1}(2) - 3P_n(2) = -1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。また, ②より $\{P_{n+1}(2) - P_n(2)\}$ は初項が $P_2(2) - P_1(2) = 3$ であり, 公比が 3 である等比数列とみなせるから,

$$P_{n+1}(2) - P_n(2) = \{P_2(2) - P_1(2)\} \cdot 3^{n-1}$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1}(2) - P_n(2) = 3^n \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。③, ④から $P_{n+1}(2)$ を消去することで, $P_n(2) = \frac{3^n + 1}{2}$ となる。

$$(\text{答}) \quad P_n(2) = \frac{3^n + 1}{2}$$