

1

(1)

$f(x) = e^{1+\sin^2 x}$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1+\sin^2 x} \cdot (1 + \sin^2 x)' \\ &= 2 \sin x \cos x \cdot e^{1+\sin^2 x} \\ &= \sin 2x \cdot e^{1+\sin^2 x} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $f'(x) = \sin 2x \cdot e^{1+\sin^2 x}$

(2)

与えられた隣接 3 項間の漸化式

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad \dots \textcircled{1}$$

の特性方程式は $\alpha^2 = 3\alpha - 2$ であり, これを解いて $\alpha = 1, 2$ とわかる。よって①は,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \quad \dots \textcircled{2}$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n \quad \dots \textcircled{3}$$

と 2 通りに表せる。②より $\{a_{n+1} - a_n\}$ は初項 $a_2 - a_1 = 1$, 公比 2 の等比数列となるから,

$$a_{n+1} - a_n = 2^{n-1} \quad \dots \textcircled{4}$$

と表せる。また, ③より $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は n によらず一定となり, $a_2 - 2a_1 = 0$ より,

$$a_{n+1} - 2a_n = 0 \quad \dots \textcircled{5}$$

と表せる。④と⑤から a_{n+1} を消去して, $a_n = 2^{n-1}$ とわかる。

(答) $a_n = 2^{n-1}$

(3)

$f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ より,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4(x^2+1) - 4x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

となる。また,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{4(-2x)(x^2+1)^2 - 4(1-x^2) \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^4} \\ &= \frac{-8x(x^2+1) - 16x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} \\ &= \frac{8x(x^2-3)}{(x^2+1)^3} \end{aligned}$$

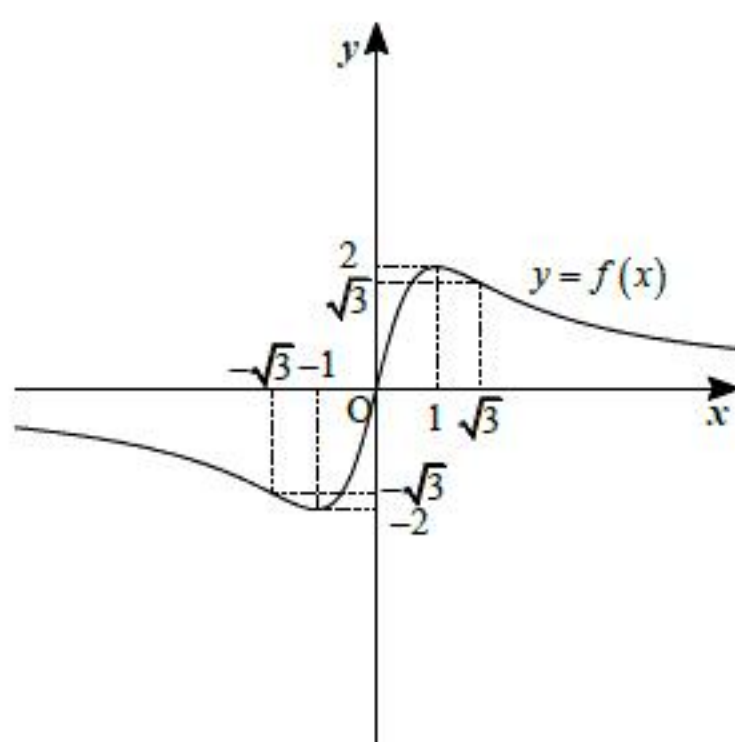
と計算できる。よって増減表は以下の通りとなる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\sqrt{3}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\sqrt{3}$	$\searrow$

増減表より, 極大値および極小値はそれぞれ $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$ であり, 変曲点は

$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ の 3 つである。また, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ より, $x \rightarrow \pm\infty$ とし

たときの漸近線は $y = 0$ となる。以上より, グラフの概形は下図のようになる。



(答) 前図

2

(1)

条件より,

$$A^2 = kA + (k-3)E \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立っている。また、ハミルトン・ケーリーの定理より,

$$A^2 = (a+d)A - (ad-bc)E \quad \dots \textcircled{2}$$

が成り立つ。①と②から A^2 を消去して,

$$\begin{aligned} kA + (k-3)E &= (a+d)A - (ad-bc)E \\ \Leftrightarrow \{k - (a+d)\}A &= \{3 - k - (ad-bc)\}E \end{aligned}$$

とわかる。ここで、与えられた条件より $b \neq 0$ または $c \neq 0$ であるから、 A は E の定数倍とはならない。したがって、上の等式が成り立つためには,

$$k - (a+d) = 0 \quad \text{かつ} \quad 3 - k - (ad-bc) = 0$$

となればよい。よって $a+d=k$, $ad-bc=3-k$ とわかる。(答) $a+d=k$, $ad-bc=3-k$

(2)

与えられた条件より,

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立っている。この式の両辺に左から A をかけて、①および③を利用すると,

$$\begin{aligned} A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \{kA + (k-3)E\} \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow kA \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} + (k-3) \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} k \\ k^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-3 \\ k^2-3k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow k &= 2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $k=2$

(3)

$b \neq 0$ または $c \neq 0$ として考えると、(1)の結果より $bc = ad + k - 3$ が成り立つ。したがって、 bc が最大となるのは ad が最大となる時である。いま $a+d=k$ が成り立っているから、 $ad = a(k-a)$ となる。これは,

$$a(k-a) = -\left(a - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4}$$

と平方完成できるから、 ad が最大となるのは $a = d = \frac{k}{2}$ のときであり、このとき,

$$\begin{aligned} bc &= \frac{k^2}{4} + k - 3 \\ &= \frac{1}{4}(k+6)(k-2) \end{aligned}$$

となる。ここで、例えば $A = \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k+6}{2} \\ \frac{k-2}{2} & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$ とすれば、与えられた条件①を満たす。

$$\text{(答) } a = d = \frac{k}{2} \text{ のとき 最大値: } bc = \frac{k^2}{4} + k - 3, \quad A \text{ の例: } \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & \frac{k+6}{2} \\ \frac{k-2}{2} & \frac{k}{2} \end{pmatrix}$$

(4)

題意より、直線 $y=kx$ 上の点 (t, kt) が 1 次変換 A により点 (t, kt) に移すことから,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} t \\ kt \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} t \\ kt \end{pmatrix} \\ \therefore A \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、(2)の結果より $k=2$ である。ここで $b \neq 0$ または $c \neq 0$ と仮定すると、(3)の結果より $a=d=1$, $bc=0$ となる。よって、 A は任意の 0 でない実数 m を用いて,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$$

と表せる。ここで、 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を計算すると,

$$\begin{aligned} A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+2m \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ m+2 \end{pmatrix} \\ &\neq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となり、 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ となることに矛盾する。よって $b=c=0$ であることがわかる。よって,

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ と表せるから、 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に代入すると,

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ 2d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow a &= d = 1 \end{aligned}$$

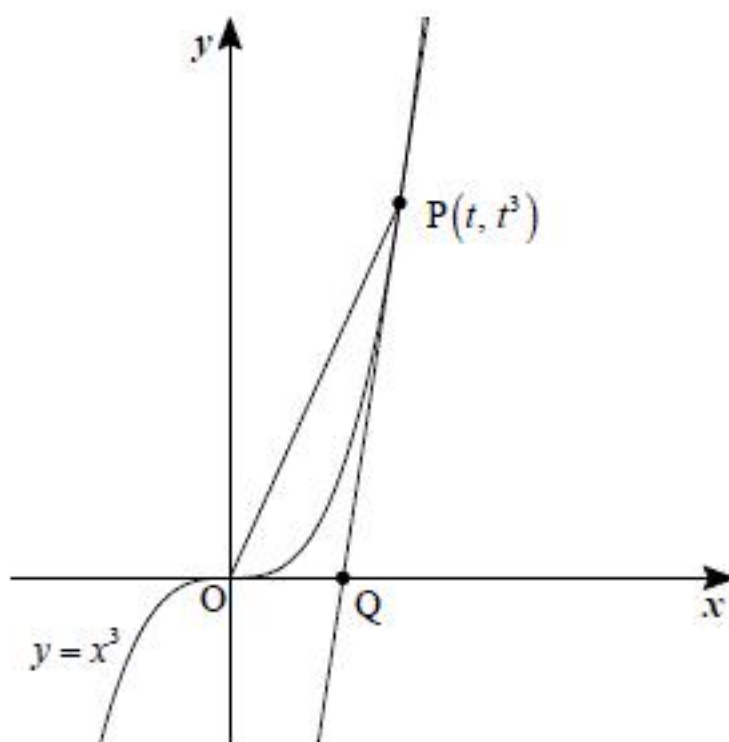
と a, d が求められる。以上より、 $A=E$ となる。

(証明終)

3

(1)

各点の位置は下図の通りとなる。



$y' = 3x^2$ より、点 P における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y - t^3 &= 3t^2(x - t) \\ \Leftrightarrow y &= 3t^2x - 2t^3 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。点 Q の x 座標は、①に $y = 0$ を代入することで $x = \frac{2t}{3}$ とわかる。よって Q の座標は

$\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$ である。

(答) $Q\left(\frac{2}{3}t, 0\right)$

(2)

$\tan \alpha$ は直線 OP の傾きに等しいから、

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{t^3}{t} \\ &= t^2 \end{aligned}$$

とわかる。また、直線 PQ と x 軸の正の向きの部分がなす角の大きさは $\alpha + \beta$ となるから、

$\tan(\alpha + \beta)$ は直線 PQ の傾きに等しい。よって、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{t^3}{t - \frac{2}{3}t} \\ &= 3t^2 \end{aligned}$$

とわかる。 $\tan$ の加法定理より、

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \\ \Leftrightarrow 3t^2 &= \frac{t^2 + \tan \beta}{1 - t^2 \cdot \tan \beta} \\ \Leftrightarrow 3t^2 - 3t^4 \tan \beta &= t^2 + \tan \beta \\ \Leftrightarrow \tan \beta &= \frac{2t^2}{1 + 3t^4} \end{aligned}$$

と $\tan \beta$ が求められる。

(答) $\tan \alpha = t^2$, $\tan \beta = \frac{2t^2}{1 + 3t^4}$

(3)

$\tan \beta$ を t の関数として考え、 $f(t) = \frac{2t^2}{1 + 3t^4}$ とおく。この導関数は、

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{4t(1 + 3t^4) - 2t^2 \cdot 12t^3}{(1 + 3t^4)^2} \\ &= \frac{4t(1 - 3t^4)}{(1 + 3t^4)^2} \\ &= \frac{4t(1 + \sqrt{3}t^2)(1 - \sqrt{3}t^2)}{(1 + 3t^4)^2} \\ &= \frac{4t(1 + \sqrt{3}t^2)(1 + \sqrt[4]{3}t)(1 - \sqrt[4]{3}t)}{(1 + 4t^3)^2} \end{aligned}$$

と計算できる。よって、 $t \geq 0$ での増減表は以下の通りとなる。

t	0	...	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$	...
$f'(t)$	0	+	0	-
$f(t)$	0	↗	極大	↘

増減表より、 $f(t) = \tan \beta$ は $t = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ のときに最大値をとることがわかり、その値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) &= \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^2}{1 + 3\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

である。 β は三角形の内角であるから $0 < \beta < \pi$ であり、この範囲で $\tan \beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ をみたすもの

は $\beta = \frac{\pi}{6}$ のみである。

(答) $t = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $\beta = \frac{\pi}{6}$

4

(1)

楕円 E と直線 l の 2 つの交点のうち、第一象限に存在する方を A とする。

まず点 A の x 座標 ($x > 0$) を求める。 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ に $y = kx$ を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{9} + \frac{k^2 x^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{4+9k^2}{36} x^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow x &= \pm \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}\end{aligned}$$

とわかる。よって、点 A の x 座標は $\frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$ である。点 A は直線 $y = kx$ 上の点であるから、そ

の座標は $\left(\frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}, \frac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}\right)$ となる。また、点 B が第三象限に存在することを踏まえると、

その座標は点 A と同様にして $\left(-\frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}, -\frac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}\right)$ と求められる。点 A と点 B は原点に関して対称であるから、

$$\begin{aligned}AB &= 2OA \\ &= 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}\right)^2 + \left(\frac{6k}{\sqrt{9k^2+4}}\right)^2} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{36(1+k^2)}{9k^2+4}} \\ &= 12 \sqrt{\frac{k^2+1}{9k^2+4}}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 12 \sqrt{\frac{k^2+1}{9k^2+4}}$$

(2)

点 P は明らかに第二象限または第四象限に存在する。前者を $P_1(x_1, y_1)$ 、後者を $P_2(x_2, y_2)$ とおく。楕円 E の方程式を y について解くと、

$$y = \pm 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$$

となる。したがって、点 P_1 は曲線 $y = 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ 上に、点 P_2 は曲線 $y = -2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ 上にある。

$y = 2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ を微分すると、 $y' = 2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{9}x\right)$ となる。題意より、点 P_1 での傾きが k

となるので、

$$\begin{aligned}k &= \left(1 - \frac{x_1^2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{9}x_1\right) \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x_1^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} &= -\frac{2x_1}{9k} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{x_1^2}{9} &= \frac{4x_1^2}{81k^2} (\because x_1 < 0) \\ \Leftrightarrow x_1^2 &= \frac{81k^2}{9k^2+4} \\ \Leftrightarrow x_1 &= -\frac{9k}{\sqrt{9k^2+4}}\end{aligned}$$

と x_1 が求められる。これを楕円 E の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{9k^2}{9k^2+4} + \frac{y_1^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow y_1^2 &= \frac{16}{9k^2+4} \\ \Leftrightarrow y_1 &= \frac{4}{\sqrt{9k^2+4}} (\because y_1 > 0)\end{aligned}$$

と y_1 も求められる。また、 $y = -2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$ を微分すると、 $y' = -2 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x^2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{9}x\right)$ となる。

題意より、点 P_2 での傾きが k となるので、点 P_1 のときと同様にして、

$$\begin{aligned}k &= \left(1 - \frac{x_2^2}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{2}{9}x_2\right) \\ \Leftrightarrow \left(1 - \frac{x_2^2}{9}\right)^{\frac{1}{2}} &= \frac{2x_2}{9k} \\ \Leftrightarrow 1 - \frac{x_2^2}{9} &= \frac{4x_2^2}{81k^2} \\ \Leftrightarrow x_2 &= \frac{9k}{\sqrt{9k^2+4}}\end{aligned}$$

と x_2 が求められる。これを楕円 E の方程式に代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{9k^2}{9k^2+4} + \frac{y_2^2}{4} &= 1 \\ \Leftrightarrow y_2^2 &= \frac{16}{9k^2+4} \\ \Leftrightarrow y_2 &= -\frac{4}{\sqrt{9k^2+4}} (\because y_2 < 0)\end{aligned}$$

と y_2 も求められる。以上より、点 P の座標は $\left(-\frac{9k}{\sqrt{9k^2+4}}, \frac{4}{\sqrt{9k^2+4}}\right), \left(\frac{9k}{\sqrt{9k^2+4}}, -\frac{4}{\sqrt{9k^2+4}}\right)$

の 2 つとなる。

$$(\text{答}) \quad P \left(-\frac{9k}{\sqrt{9k^2+4}}, \frac{4}{\sqrt{9k^2+4}} \right), \left(\frac{9k}{\sqrt{9k^2+4}}, -\frac{4}{\sqrt{9k^2+4}} \right)$$

(3)

三角形 ABC の面積が最大となるのは、点 C が直線 AB から最も離れた位置にあるとき、つまり点 C が (2) で求めた点 P と一致するときである。点 P_1 と点 P_2 が原点に関して対称であることから、 $P = P_1$ としても一般性を失わない。直線 AB 、すなわち $kx - y = 0$ と、点 P_1 の距離を L とおくと、点と直線の距離の公式より、

$$\begin{aligned}L &= \frac{\left| k \cdot \frac{-9k}{\sqrt{9k^2+4}} - \frac{4}{\sqrt{9k^2+4}} \right|}{\sqrt{k^2+1}} \\ &= \frac{\sqrt{9k^2+4}}{\sqrt{k^2+1}}\end{aligned}$$

とわかる。以上より、このときの三角形 ABC の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot AB \cdot L \\ &= \frac{1}{2} \cdot 12 \sqrt{\frac{k^2+1}{9k^2+4}} \cdot \frac{\sqrt{9k^2+4}}{\sqrt{k^2+1}} \\ &= 6\end{aligned}$$

と求められる。

(答) 6

5

(1)

x を t で微分すると,

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$$

となる。いま, $0 \leq t \leq 2\pi$ より $-1 \leq \cos t \leq 1$ だから, $\frac{dx}{dt} \geq 0$ が成り立つ。よって x は t の増加関数である。

(証明終)

(2)

$0 < t < 2\pi$ より $-1 \leq \cos t < 1$ だから, $\frac{dx}{dt} > 0$ より, $0 < t < 2\pi$ において x は常に増加する。ここ

で, $\frac{dy}{dx}$ を t の式で表すと,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

となる。 $\frac{dx}{dt} > 0$ より, $\frac{dy}{dx}$ の正負は $\frac{dy}{dt} = \sin t$ の正負と一致する。ここで,

$$t = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$t = \pi \Leftrightarrow x = \pi$$

$$t = 2\pi \Leftrightarrow x = 2\pi$$

であるから,

$$0 < t \leq \pi \Leftrightarrow 0 < x \leq \pi \quad \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} \geq 0$$

$$\pi \leq t < 2\pi \Leftrightarrow \pi \leq x < 2\pi \quad \text{のとき} \quad \frac{dy}{dx} \leq 0$$

とわかる。

$$y(0) = 1 - 1 = 0$$

$$y(\pi) = 1 - (-1) = 2$$

$$y(2\pi) = 1 - 1 = 0$$

より, 増減表は以下のようになる。

t	0	...	π	...	2π
$x(t)$	0	...	π	...	2π
$\frac{dy}{dx}$		+	0	-	
$y(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

(答) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$, 増減表: 前表

(3)

C を積分定数とすると,

$$\begin{aligned} \int \cos^2 t dt &= \int \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 t dt &= \int \left\{ (1 - \sin^2 t) \cos t \right\} dt \\ &= \int (\cos t - \sin^2 t \cos t) dt \\ &= \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C \end{aligned}$$

とそれぞれ計算できる。

$$(答) \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C, \quad \int \cos^3 t dt = \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t + C$$

(4)

$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t$ であり, x が 0 から 2π まで増加するとき, t も 0 から 2π まで増加する。よって

回転体の体積を V とおき, x を t に置換して積分すると, (3)の結果より,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 dx \\ &= \pi \int_0^{2\pi} y^2 \frac{dx}{dt} dt \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \cdot (1 - \cos t) dt \\ &= \pi \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t) dt \\ &= \pi \left[t - 3\sin t + 3 \cdot \frac{1}{2} \left(t + \frac{\sin 2t}{2} \right) - \left(\sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \right]_0^{2\pi} \\ &= \pi \left(2\pi + \frac{3}{2} \cdot 2\pi \right) \\ &= 5\pi^2 \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $5\pi^2$