

問題 1

(1)

$\log_{10} 2 = 0.3010$ より,

$$\begin{aligned}\log_{10} 2^{2015} &= 2015 \log_{10} 2 \\ &= 606.515\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}10^{606} &< 10^{606.515} < 10^{607} \\ \Leftrightarrow 10^{606} &< 2^{2015} < 10^{607}\end{aligned}$$

となるため, 2^{2015} は 607 桁の自然数となる。

(答) 607 桁

(2)

与えられた球面の方程式は,

$$(x-a)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 9$$

であるから, これと yz 平面, すなわち $x=0$ とが交わってできる円の方程式は,

$$y^2 + (z+1)^2 = 9 - a^2$$

となる。この円の半径が 2 となることから,

$$\begin{aligned}9 - a^2 &= 4 \\ \therefore a &= \pm\sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。

(答) $a = \pm\sqrt{5}$

(3)

与式を微分すると,

$$\begin{aligned}y' &= -9x^2 + 9 \\ &= -9(x+1)(x-1)\end{aligned}$$

であるから, $y'=0$ とすると $x=\pm 1$ となる。従って, 増減表は以下の通りとなる。

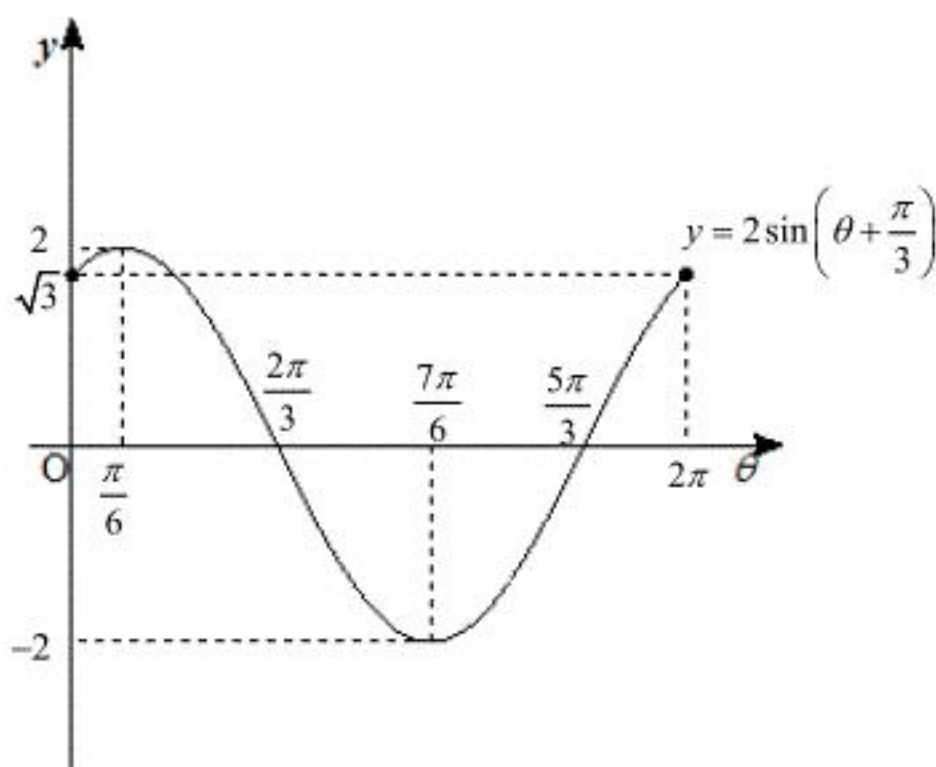
x	...	-1	...	1	...
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	-7	$\nearrow$	5	$\searrow$

増減表から, 求める極小値は, $x=-1$ のときにとる $y=-7$ となる。

(答) -7

(4)

求めるグラフは, $y=\sin\theta$ のグラフの振幅を 2 倍にして, θ 軸方向に $-\frac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものであり, 下図のようになる。



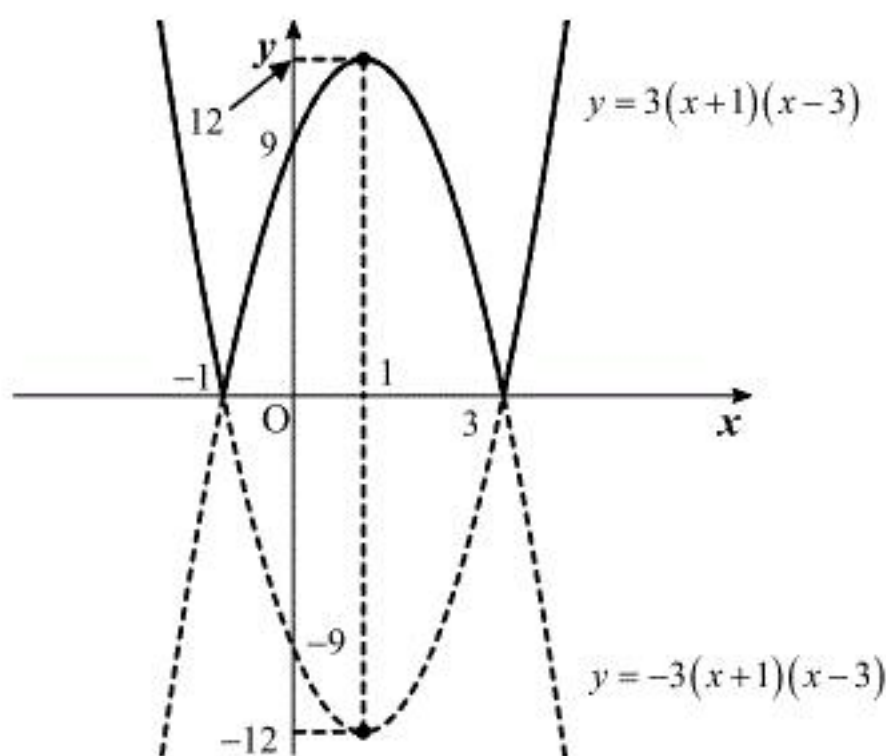
(答) 前図

問題 2

(1)

$$\begin{aligned}
 y &= 3|x^2 - 2x - 3| \\
 &= 3|(x+1)(x-3)| \\
 &= \begin{cases} 3(x+1)(x-3) & (x < -1, 3 \leq x) \\ -3(x+1)(x-3) & (-1 \leq x < 3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

と変形できるから、グラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$1 < t < 3$ より, $t < 3 < t+2$ であるから, 積分区間 $t \leq x \leq t+2$ は必ず $x=3$ を含む。従って,

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \int_t^3 \{-3(x^2 - 2x - 3)\} dx + \int_3^{t+2} 3(x^2 - 2x - 3) dx \\
 &= \left[-x^3 + 3x^2 + 9x \right]_t^3 + \left[x^3 - 3x^2 - 9x \right]_3^{t+2} \\
 &= 27 - (-t^3 + 3t^2 + 9t) + \{(t+2)^3 - 3(t+2)^2 - 9(t+2)\} - (-27) \\
 &= 2t^3 - 18t + 32
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $S(t) = 2t^3 - 18t + 32$

(3)

(2)より,

$$\begin{aligned}
 S'(t) &= 6t^2 - 18 \\
 &= 6(t^2 - 3)
 \end{aligned}$$

であるから, $S'(t) = 0$ とすると $t = \pm\sqrt{3}$ であり, $1 < t < 3$ より $t = \sqrt{3}$ である。従って, 増減表は以下の通りになる。

t	1	...	$\sqrt{3}$	...	3
$S'(t)$	$\nearrow$	-	0	+	$\nearrow$
$S(t)$	$\nearrow$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	$\nearrow$

増減表により, $S(t)$ は $t = \sqrt{3}$ で最小値

$$\begin{aligned}
 S(\sqrt{3}) &= 2 \cdot 3\sqrt{3} - 18\sqrt{3} + 32 \\
 &= 32 - 12\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

をとる。

(答) $t = \sqrt{3}$ のとき最小値 $S(\sqrt{3}) = 32 - 12\sqrt{3}$

問題 3

(1)

正五角形の1つの内角は 108° であり、頂点 A, B, C, D, E は同一円周上にある。したがって、 $BC = CD = DE$ について円周角の定理を用いると $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE = 36^\circ$ である。ほかの頂点についても同様に考えて

$$\angle CAD = \angle FDC = 36^\circ \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \angle ACD &= \angle ACE + \angle ECD \\ &= 36^\circ + 36^\circ \\ &= 72^\circ \\ \angle ADC &= \angle ADB + \angle BDC \\ &= 36^\circ + 36^\circ \\ &= 72^\circ \end{aligned}$$

であり、 $\triangle ACD$ は二等辺三角形となる。ここで、

$$\angle ACD = \angle DCF$$

であるから、

$$\angle ADC = \angle DCF \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。以上①, ②から、二角相等により、

$$\triangle ACD \simeq \triangle DFC$$

である。

(証明終)

(2)

$\triangle ACD \simeq \triangle DFC$ であるから、 $\triangle DFC$ も二等辺三角形である。従って、

$$CD = DF$$

であり、図形の対称性から、

$$AF = AB = a_1$$

である。ここで、 $FC = x (x > 0)$ とすると、 $\triangle ACD \simeq \triangle DFC$ から、

$$\begin{aligned} x : a_1 &= a_1 : (a_1 + x) \\ \Leftrightarrow x(a_1 + x) &= a_1^2 \\ \Leftrightarrow x^2 + a_1x - a_1^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-a_1 \pm \sqrt{5}a_1}{2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} a_1 \end{aligned}$$

となり、 $x > 0, a_n > 0$ であるから、 $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} a_1$ である。従って、

$$\begin{aligned} AC &= a_1 + x \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_1 \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(3)

正五角形 P_n の頂点を A_n, B_n, C_n, D_n, E_n とし、 A_nB_n, B_nC_n の中点を、それぞれ M_n, N_n とすると、

$$a_{n+1} = M_n N_n$$

である。ここで、中点連結定理により、

$$M_n N_n = \frac{1}{2} A_n C_n$$

である。(2)と同様に、

$$\begin{aligned} A_n C_n &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} A_n B_n \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_n \end{aligned}$$

であるから、

$$a_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} a_n$$

となる。従って、数列 $\{a_n\}$ は、初項1、公比 $\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$ の等比数列であるから、

$$a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad a_n = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{n-1}$$

(4)

求める和を S_n とすると、

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^{k-1} \\ &= \frac{1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n}{1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{4}} \\ &= \frac{4}{3 - \sqrt{5}} \left\{ 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n \right\} \\ &= (3 + \sqrt{5}) \left\{ 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad (3 + \sqrt{5}) \left\{ 1 - \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right)^n \right\}$$