

1

(1)

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= \int x (\sin x)' dx \\ &= x \sin x - \int (x)' \sin x dx \\ &= x \sin x + \cos x + C\end{aligned}$$

となる。ただし、 C は積分定数である。

$$(答) \int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(2)

[1] $x > 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{5x-6}{x-2} &> x+1 \\ \Leftrightarrow 5x-6 &> (x+1)(x-2) \quad (\because x-2 > 0) \\ \Leftrightarrow x^2-6x+4 &< 0 \\ \Leftrightarrow 3-\sqrt{5} &< x < 3+\sqrt{5}\end{aligned}$$

となるが、 $3-\sqrt{5} < 2 < 3+\sqrt{5}$ より $x > 2$ を満たす不等式の解は

$$2 < x < 3+\sqrt{5}$$

である。

[2] $x < 2$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{5x-6}{x-2} &> x+1 \\ \Leftrightarrow 5x-6 &< (x+1)(x-2) \quad (\because x-2 < 0) \\ \Leftrightarrow x^2-6x+4 &> 0 \\ \Leftrightarrow x < 3-\sqrt{5}, 3+\sqrt{5} &< x\end{aligned}$$

となるが、[1]と同様にして $x < 2$ を満たす不等式の解は

$$x < 3-\sqrt{5}$$

である。

以上、[1], [2]より、求める不等式の解は

$$x < 3-\sqrt{5}, 2 < x < 3+\sqrt{5}$$

となる。

$$(答) \quad x < 3-\sqrt{5}, 2 < x < 3+\sqrt{5}$$

(3)

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{-(1+e^{-x})'}{(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\end{aligned}$$

となり、すべての実数 x に対して $e^{-x} > 0, (1+e^{-x})^2 > 0$ であるから

$$f'(x) > 0$$

となる。よって、 $f(x)$ は単調増加関数である。また

$$\begin{aligned}f''(x) &= \frac{(e^{-x})'(1+e^{-x})^2 - (e^{-x})\{(1+e^{-x})^2\}'}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \frac{-e^{-x}(1+e^{-x})^2 + 2e^{-2x}(1+e^{-x})}{(1+e^{-x})^4} \\ &= \frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}\end{aligned}$$

となり、すべての実数 x に対して $e^{-x} > 0, (1+e^{-x})^3 > 0$ であるから

$$e^{-x}-1 > 0 \text{ つまり } x < 0 \text{ のとき, } f''(x) > 0$$

$$e^{-x}-1 = 0 \text{ つまり } x = 0 \text{ のとき, } f''(x) = 0$$

$$e^{-x}-1 < 0 \text{ つまり } x > 0 \text{ のとき, } f''(x) < 0$$

となる。よって、関数 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

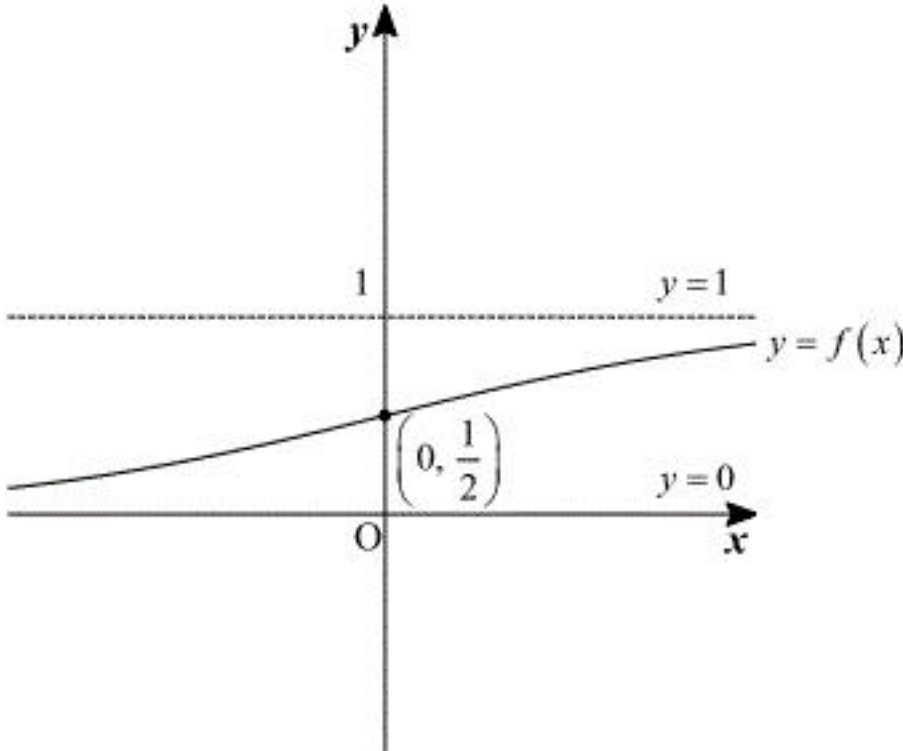
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

よって、関数 $f(x)$ の変曲点の座標は $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ である。また

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \\ &= 0\end{aligned}$$

となるから、関数 $f(x)$ のグラフの漸近線は 2 直線 $y=1, y=0$ である。以上より、関数 $f(x)$ のグラフの概形は下図のようになる。



$$(答) \text{ 増減・凹凸：前表, 変曲点：}\left(0, \frac{1}{2}\right), \text{ グラフ：前図}$$

2

(1)

$$f(x) = e^{2x} \text{ とおくと}$$
$$f'(x) = 2e^{2x}$$

となるから、曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(a, e^{2a})$ における接線 l の方程式は

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$
$$\Leftrightarrow y = 2e^{2a}(x - a) + e^{2a}$$

となる。これが原点 O を通るとき

$$0 = 2e^{2a}(0 - a) + e^{2a}$$
$$\Leftrightarrow (2a - 1)e^{2a} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2a - 1 = 0 \quad (\because e^{2a} \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

である。

(答) $a = \frac{1}{2}$

(2)

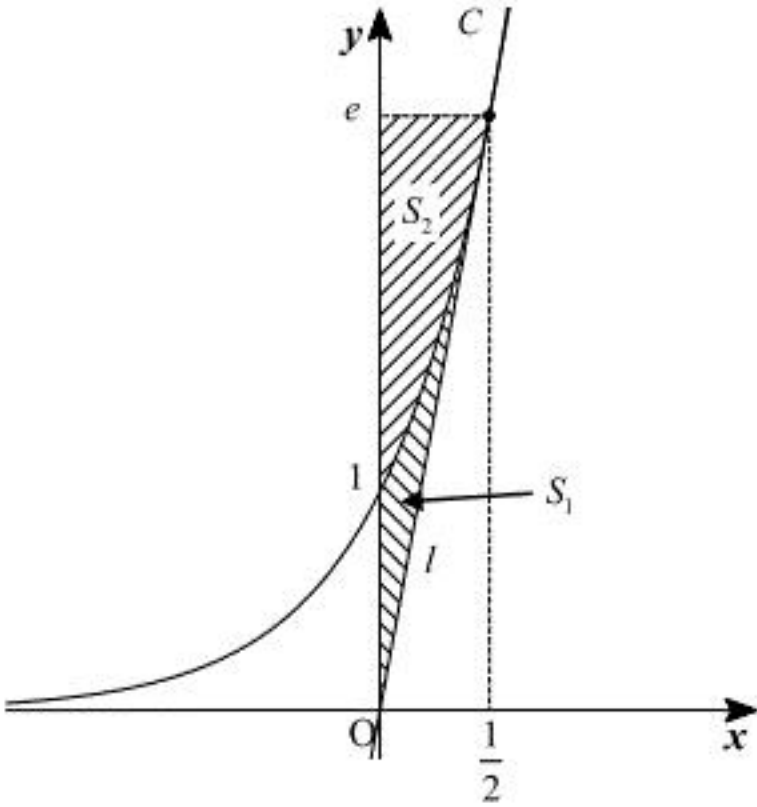
$$\int \log t dt = \int (t)' \log t dt$$
$$= t \log t - \int t \cdot \frac{1}{t} dt$$
$$= t \log t - \int dt$$
$$= t \log t - t + D$$
$$\int (\log t)^2 dt = \int (t)' (\log t)^2 dt$$
$$= t (\log t)^2 - \int t \cdot 2 \log t \cdot \frac{1}{t} dt$$
$$= t (\log t)^2 - 2 \int \log t dt$$
$$= t (\log t)^2 - 2t \log t + 2t + E$$

となる。ただし、 D, E は積分定数である。

(答) $\int \log t dt = t \log t - t + D, \int (\log t)^2 dt = t (\log t)^2 - 2t \log t + 2t + E$ (D, E は積分定数)

(3)

(1)の結果を用いて、曲線 C と直線 l および y 軸で囲まれた図形は下図の領域 S_1 のようになる。
また、曲線 C と直線 $y = e$ および y 軸で囲まれた領域を S_2 とおく。



S_1 と S_2 を合わせた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体は、底面の半径 $\frac{1}{2}$ 、高さ e の直円錐であるから、その体積を V_1 とおくと

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 \cdot e$$
$$= \frac{\pi e}{12}$$

となる。また、 $y = e^{2x}$ のとき

$$y = e^{2x} \quad (> 0)$$
$$\Leftrightarrow \log y = 2x$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \log y$$

となるから、 S_2 を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とおくと、(2)の結果を用いて

$$V_2 = \int_1^e \pi x^2 dy$$
$$= \int_1^e \pi \left(\frac{1}{2} \log y \right)^2 dy$$
$$= \frac{\pi}{4} \left[y (\log y)^2 - 2y \log y + 2y \right]_1^e$$
$$= \frac{\pi}{4} (e - 2)$$

となる。よって、 S_1 を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V = V_1 - V_2$$
$$= \frac{\pi e}{12} - \frac{\pi}{4} (e - 2)$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi e}{6}$$

である。

(答) $V = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi e}{6}$

3

(1)

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \text{ とおくと}$$
$$f'(x) = x$$

であるから、放物線 $C: y = f(x)$ 上の点 $\left(t, \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y = f'(t)(x - t) + \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow y = t(x - t) + \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}$$

となる。これが点 $A(a, a)$ を通るとき

$$a = t(a - t) + \frac{t^2}{2} + \frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow t^2 - 2at + 2a - 5 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。この t に関する 2 次方程式に関して、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a + 5$$
$$= (a - 1)^2 + 4$$
$$> 0$$

であるから、方程式①は異なる 2 つの実数解をもち、その解は

$$t = a \pm \sqrt{a^2 - 2a + 5}$$

となる。これらが p, q ($p < q$) にほかならないから

$$p = a - \sqrt{a^2 - 2a + 5}$$
$$q = a + \sqrt{a^2 - 2a + 5}$$

である。

$$(\text{答}) \quad p = a - \sqrt{a^2 - 2a + 5}, q = a + \sqrt{a^2 - 2a + 5}$$

(2)

(1)の結果を用いて、2 直線 AP, AQ の傾きはそれぞれ p, q である。この 2 直線が x 軸の正の部分となす角をそれぞれ α, β $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$\tan \alpha = p, \tan \beta = q$$

と表される。ここで、 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ において $\tan x$ は単調増加するから、 $p < q$ であることより

$$\alpha < \beta$$

となる。よって、 $\phi = \beta - \alpha$ とおくと

$$0 < \phi < \pi \quad \dots \textcircled{2}$$

であり、(1)の結果を用いて

$$\tan \phi = \tan(\beta - \alpha)$$
$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$
$$= \frac{q - p}{1 + qp}$$
$$= \frac{2\sqrt{a^2 - 2a + 5}}{1 + (2a - 5)}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2 - 2a + 5}}{a - 2}$$

となる。 $a < 2$ より $\tan \phi < 0$ となり、②を満たすことから

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$$

となる。よって、 $\theta = \angle PAQ$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とするとき

$$\theta = \pi - \phi$$

であるから

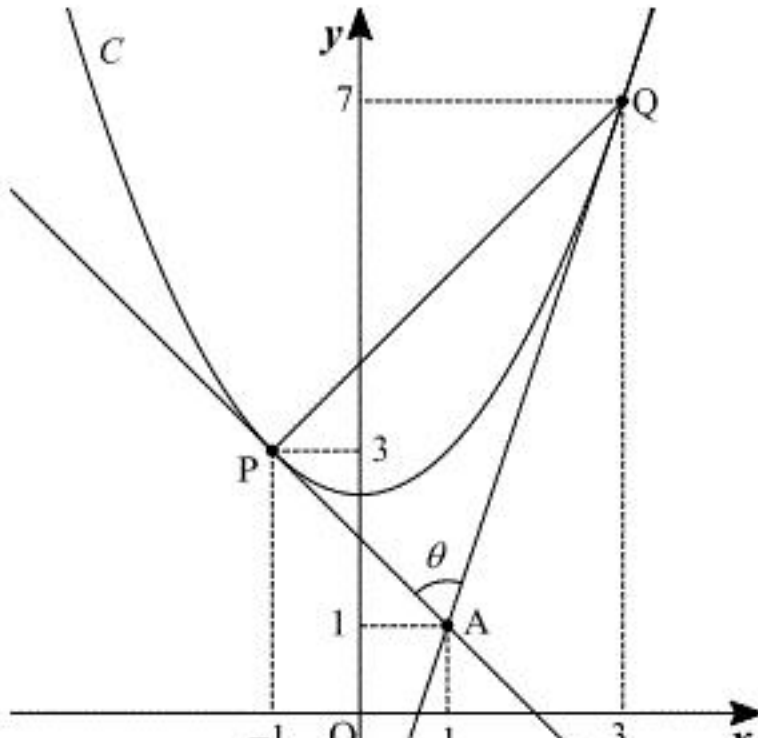
$$\tan \theta = \tan(\pi - \phi)$$
$$= -\tan \phi$$
$$= \frac{\sqrt{a^2 - 2a + 5}}{2 - a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{a^2 - 2a + 5}}{2 - a}$$

(3)

$a = 1$ のとき、下図のようになる。



$a = 1$ のとき、(2)の結果を用いて

$$\tan \theta = 2$$

となるから、 $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ より

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

となり、よって

$$\sin \theta = \sqrt{\cos^2 \theta \tan^2 \theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 2^2}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{5}}$$

である。また、 $a = 1$ のとき $P(-1, 3), Q(3, 7)$ であるから、線分 PQ の長さは

$$PQ = \sqrt{(3+1)^2 + (7-3)^2}$$
$$= 4\sqrt{2}$$

である。以上より、 $\triangle PAQ$ において正弦定理より、 $\triangle PAQ$ の外接円の半径 R は

$$R = \frac{1}{2} \cdot \frac{PQ}{\sin \theta}$$
$$= \sqrt{10}$$

である。

$$(\text{答}) \quad R = \sqrt{10}$$

4

(1)

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくと、 $OA=a, OB=b$ より $|\vec{a}|=a, |\vec{b}|=b$ となる。このとき

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}|^2 &= |\vec{b}-\vec{a}|^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} \end{aligned}$$

となり、 $AB=1$ より

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} &= 1^2 \\ \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{2} \end{aligned}$$

である。また、点Cは線分ABを $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{OC} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad \dots\dots ①$$

となるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\} \\ &= (t-1)|\vec{a}|^2 + t|\vec{b}|^2 + (1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b} \\ &= (t-1)a^2 + tb^2 + \frac{(1-2t)(a^2+b^2-1)}{2} \\ &= t - \frac{a^2-b^2+1}{2} \end{aligned}$$

と表される。

(答) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OC} = t - \frac{a^2-b^2+1}{2}$

(2)

点Dは $\angle BAA'$ の2等分線と $\angle ABB'$ の2等分線の交点であるから、直線ADは $\angle BAA'$ の2等分線である。さらに

$$\begin{aligned} AA' &= \frac{1}{a}OA \\ &= 1 \end{aligned}$$

より $AA'=AB$ であるから、ある実数 p を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AD} &= p(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB}) \\ &= p\left\{\frac{1}{a}\vec{a} + (\vec{b}-\vec{a})\right\} \\ &= p\left(\frac{1}{a}-1\right)\vec{a} + p\vec{b} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \left(\frac{p}{a}-p+1\right)\vec{a} + p\vec{b} \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

と表される。同様に、直線BDは $\angle ABB'$ の2等分線であり

$$\begin{aligned} BB' &= \frac{1}{b}OB \\ &= 1 \end{aligned}$$

より $BB'=AB$ であるから、ある実数 q を用いて

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} &= q(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) \\ &= q\left\{(\vec{b}-\vec{a}) + \frac{1}{b}\vec{b}\right\} \\ &= -q\vec{a} + q\left(\frac{1}{b}+1\right)\vec{b} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \\ &= -q\vec{a} + \left(\frac{q}{b}+q+1\right)\vec{b} \quad \dots\dots ③ \end{aligned}$$

と表される。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに平行でなく $\vec{0}$ でない2つのベクトルであるから、②、③より係数比較を行うことで

$$\begin{cases} \frac{p}{a}-p+1 = -q \\ p = \frac{q}{b}+q+1 \end{cases} \quad \dots\dots ④$$

となる。三角形の存在条件より、 $a+b-1>0$ であるから

$$\begin{cases} p = \frac{a}{a+b-1} \\ q = -\frac{b}{a+b-1} \end{cases}$$

となる。このことと、②、④より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= -q\vec{a} + p\vec{b} \\ &= \frac{b}{a+b-1}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b-1}\overrightarrow{OB} \end{aligned}$$

と表される。

(答) $\frac{b}{a+b-1}\overrightarrow{OA} + \frac{a}{a+b-1}\overrightarrow{OB}$

(3)

3点O, C, Dが一直線上にあるとき、ある実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OD}$$

と表されるから、①と(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} (1-t)\vec{a} + t\vec{b} &= k\left(\frac{b}{a+b-1}\vec{a} + \frac{a}{a+b-1}\vec{b}\right) \\ \Leftrightarrow \left(1-t-\frac{bk}{a+b-1}\right)\vec{a} + \left(t-\frac{ak}{a+b-1}\right)\vec{b} &= \vec{0} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\vec{a}, \vec{b}$ は互いに平行でなく $\vec{0}$ でない2つのベクトルであるから、係数比較を行うことで

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 1-t-\frac{bk}{a+b-1} = 0 \\ t-\frac{ak}{a+b-1} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} t = \frac{a}{a+b} \\ k = 1-\frac{1}{a+b} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。

(答) $t = \frac{a}{a+b}$

(1) 点 X_2 は線分 PX_1 を $1:2$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX_2} &= \frac{2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX_1}}{3} \\ \Leftrightarrow (x_2, y_2) &= \frac{2}{3}(-6, 0) + \frac{1}{3}(3\cos\theta, 3\sin\theta) \\ \Leftrightarrow (x_2, y_2) &= (-4 + \cos\theta, \sin\theta)\end{aligned}$$

と表される。

(答) $x_2 = -4 + \cos\theta, y_2 = \sin\theta$

(2) 曲線 C_1 は曲線 $x = 3\cos\theta, y = 3\sin\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) であるから、原点中心で半径 3 の上半円を表す。よって、曲線 C_1 上の点 A_1 に関して直線 A_1P が曲線 C_1 に接するとき

$$\angle OA_1P = \frac{\pi}{2}$$

であり

$$\begin{aligned}OA_1 : OP &= 3 : 6 \\ &= 1 : 2\end{aligned}$$

より、 $\triangle A_1PO$ は $\angle A_1PO = \frac{\pi}{6}$ の直角三角形となる。また、(1)の結果を用いて、曲線 C_2 は曲線 $x = -4 + \cos\theta, y = \sin\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) であるから、点 $(-4, 0)$ 中心で半径 1 の上半円を表す。ここで $O_2(-4, 0)$ とおくと、曲線 C_2 上の点 A_2 に関して直線 A_2P が曲線 C_2 に接するとき

$$\angle O_2A_2P = \frac{\pi}{2}$$

であり

$$O_2A_2 : O_2P = 1 : 2$$

より、 $\triangle A_2PO_2$ は $\angle A_2PO_2 = \frac{\pi}{6}$ の直角三角形となる。さらに、 3 点 O, O_2, P は 1 直線上に存在

するから $\angle A_2PO = \frac{\pi}{6}$ となる。

(答) $\angle A_1PO = \frac{\pi}{6}, \angle A_2PO = \frac{\pi}{6}$

(3) 点 X_{n+1} は線分 PX_n を $1:2$ に内分するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OX_{n+1}} &= \frac{2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OX_n}}{3} \\ \Leftrightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) &= \frac{2}{3}(-6, 0) + \frac{1}{3}(x_n, y_n) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n - 4 \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} + 6 = \frac{1}{3}(x_n + 6) \\ y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n \end{cases}\end{aligned}$$

となり、数列 $\{x_n + 6\}$ は初項 $3\cos\theta + 6$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned}x_n + 6 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} (3\cos\theta + 6) \\ \Leftrightarrow x_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} (\cos\theta + 2) - 6\end{aligned}$$

となり、数列 $\{y_n\}$ は初項 $3\sin\theta$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから

$$\begin{aligned}y_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot 3\sin\theta \\ \Leftrightarrow y_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \sin\theta\end{aligned}$$

となる。

(答) $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} (\cos\theta + 2) - 6, y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \sin\theta$

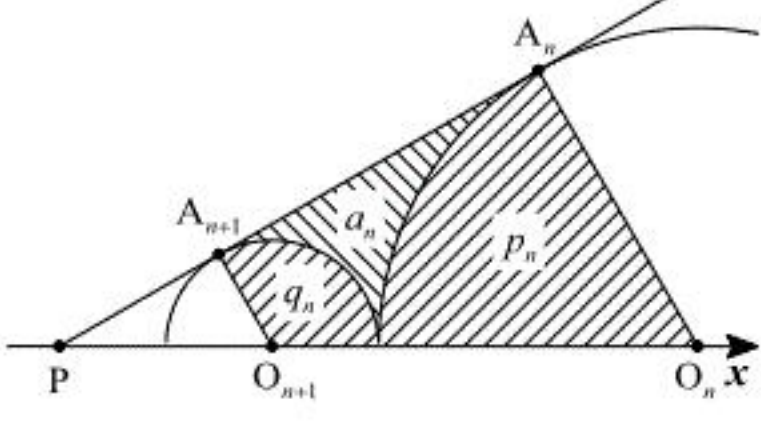
(4) $\left|\frac{1}{3}\right| < 1$ であるから

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} (\cos\theta + 2) - 6 \right\} \\ &= -6 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \sin\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

である。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -6, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

(5) (3)の結果より、曲線 C_n は曲線 $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} (\cos\theta + 2) - 6, y = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} \sin\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) であり、これは中心 $\left(2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} - 6, 0\right)$ (O_n とおく)、半径 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ の上半円を表す。さらに、帰納的に考えて点 A_n ($n=1, 2, \dots$) と点 P は 1 直線上に存在し、また、点 O_n ($n=1, 2, \dots$) は x 軸上に存在する。ただし、 $O_1 = O$ である。さらに、(2)の結果を用いて $\angle A_nPO = \frac{\pi}{6}$ となる。ここで、下図のように各領域の面積をおく。



このとき、 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ とおき、さらに、 $\triangle O_nA_nP$ の面積を T_n とおくと

$$\begin{aligned}T_n - T_{n+1} &= a_n + p_n + q_n \\ \Leftrightarrow a_n &= T_n - T_{n+1} - p_n - q_n\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{k=1}^n (T_k - T_{k+1} - p_k - q_k) \\ &= T_1 - T_{n+1} - \sum_{k=1}^n p_k - \sum_{k=1}^n q_k \\ &= T_1 - T_{n+1} - p_1 - \sum_{k=1}^n (p_{k+1} + q_k) + p_{n+1}\end{aligned}$$

である。ここで

$$\begin{aligned}T_k &= \frac{1}{2} O_k A_k \cdot O_k P \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-4}\end{aligned}$$

である。また、 $p_{k+1} + q_k$ は曲線 C_{k+1} と x 軸で囲まれた部分の面積であるから

$$\begin{aligned}p_{k+1} + q_k &= \frac{1}{2} \pi \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right\}^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}\end{aligned}$$

となり、 p_k は半径 $\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}$ で中心角 $\frac{\pi}{3}$ の扇形の面積であるから

$$\begin{aligned}p_k &= \pi \cdot \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \right\}^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2k-3}\end{aligned}$$

となる。以上より

$$S_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \right\} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$$

となるから

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-2} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} - \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \right\} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1} \right] \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \pi - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{9}\right)^{k-1} \right\} \left(\because \left|\frac{1}{9}\right| < 1 \right) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \pi - \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} \left(\because \left|\frac{1}{9}\right| < 1 \right) \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2} \pi - \frac{9}{16} \pi \\ &= \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{33}{16} \pi\end{aligned}$$

である。

(答) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{33}{16} \pi$