

問題 1

(1)

100 以下の自然数のうち、3 で割り切れる数の和は、

$$\begin{aligned} 3+6+\cdots+99 &= 3(1+2+\cdots+33) \\ &= 3\cdot\frac{1}{2}\cdot 33\cdot 34 \\ &= 1683 \end{aligned}$$

であり、7 で割り切れる数の和は、

$$\begin{aligned} 7+14+\cdots+98 &= 7(1+2+\cdots+14) \\ &= 7\cdot\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 15 \\ &= 735 \end{aligned}$$

である。ここで、3 と 7 の最小公倍数は 21 であるから、100 以下の自然数のうち 21 で割り切れる数の和は、

$$\begin{aligned} 21+42+63+84 &= 21(1+2+3+4) \\ &= 21\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 \\ &= 210 \end{aligned}$$

である。以上から、求める値は、

$$1683+735-210=2208$$

となる。

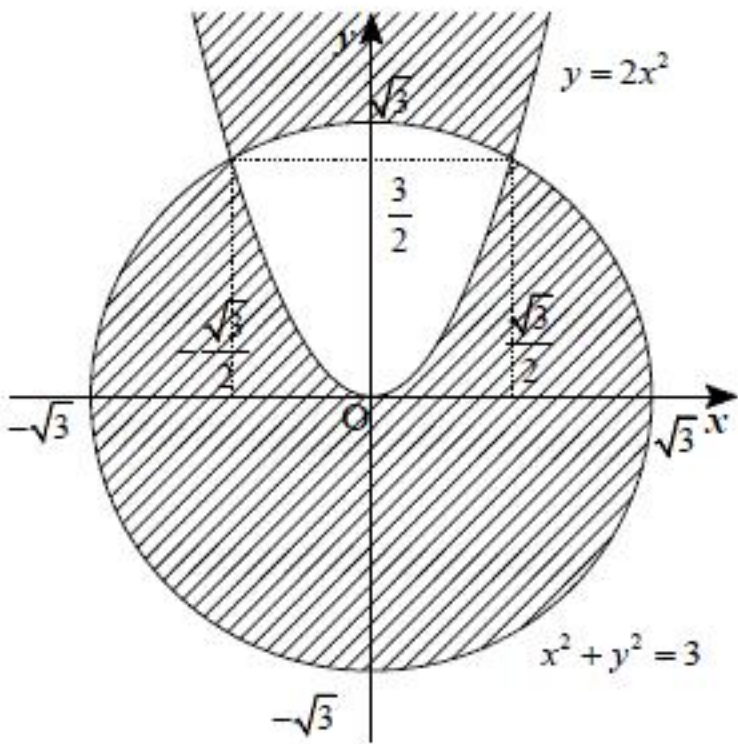
(答) 2208

(2)

$$(2x^2-y)(x^2+y^2-3)\leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y\leq 2x^2 \\ x^2+y^2\leq 3 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y\geq 2x^2 \\ x^2+y^2\geq 3 \end{cases}$$

と変形できるから、与えられた不等式が表す領域は以下のようになる。ただし、境界を含む。



(答) 前図

(3)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 2\sin\alpha+2\cos\beta=1 \\ 2\cos\alpha-2\sin\beta=\sqrt{3} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} \sin\alpha=\frac{1-2\cos\beta}{2} \\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}+2\sin\beta}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これを $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ に代入して、三角関数の合成を用いると、

$$\begin{aligned} &\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \\ \Leftrightarrow &(1-2\cos\beta)^2+(\sqrt{3}+2\sin\beta)^2=4 \\ \Leftrightarrow &4=4\cos\beta-4\sqrt{3}\sin\beta \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cos\beta-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta \\ \Leftrightarrow &\frac{1}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\beta\right) \end{aligned}$$

となる。

$$-\frac{11}{6}\pi<\frac{\pi}{6}-\beta\leq\frac{\pi}{6}$$

を考慮すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{6}-\beta &= -\frac{7}{6}\pi, \frac{\pi}{6} \\ \therefore \beta &= 0, \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

となる。 $\beta=0$ のとき、

$$\sin\alpha=-\frac{1}{2}, \cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

より、 $\alpha=\frac{11}{6}\pi$ となる。 $\beta=\frac{4}{3}\pi$ のとき、

$$\sin\alpha=1, \cos\alpha=0$$

より、 $\alpha=\frac{1}{2}\pi$ となる。したがって、

$$(\alpha, \beta)=\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 0\right)$$

である。

(答) $(\alpha, \beta)=\left(\frac{\pi}{2}, \frac{4}{3}\pi\right), \left(\frac{11}{6}\pi, 0\right)$

(4)

$26x+7y=2$ をみたす整数の組み合わせの1つに

$$(x, y)=(-1, 4)$$

がある。

$$\begin{cases} 26x+7y=2 \\ 26\cdot(-1)+7\cdot 4=2 \end{cases}$$

となるから、両辺の差を取ると

$$26(x+1)+7(y-4)=0$$

となる。7, 26 は互いに素であるから、 m を整数として

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x+1=7m \\ y-4=-26m \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x=7m-1 \\ y=-26m+4 \end{cases} \end{aligned}$$

とおける。 $1\leq x\leq 25$ の範囲で、上の式を満たすのは

$$(x, y)=(6, -22), (13, -48), (20, -74)$$

である。

(答) $(x, y)=(6, -22), (13, -48), (20, -74)$

問題 2

(1)

曲線 $y = (x-a)^2 - 4$ と直線 $y = 2x - 7$ が接するから、

$$(x-a)^2 - 4 = 2x - 7$$

が重解を持つ。

$$(x-a)^2 - 4 = 2x - 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 3 = 0$$

と変形でき、この式の判別式を D とおくと、

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (a+1)^2 - (a^2 + 3) \\ &= 2a - 2\end{aligned}$$

である。 $D = 0$ となるから

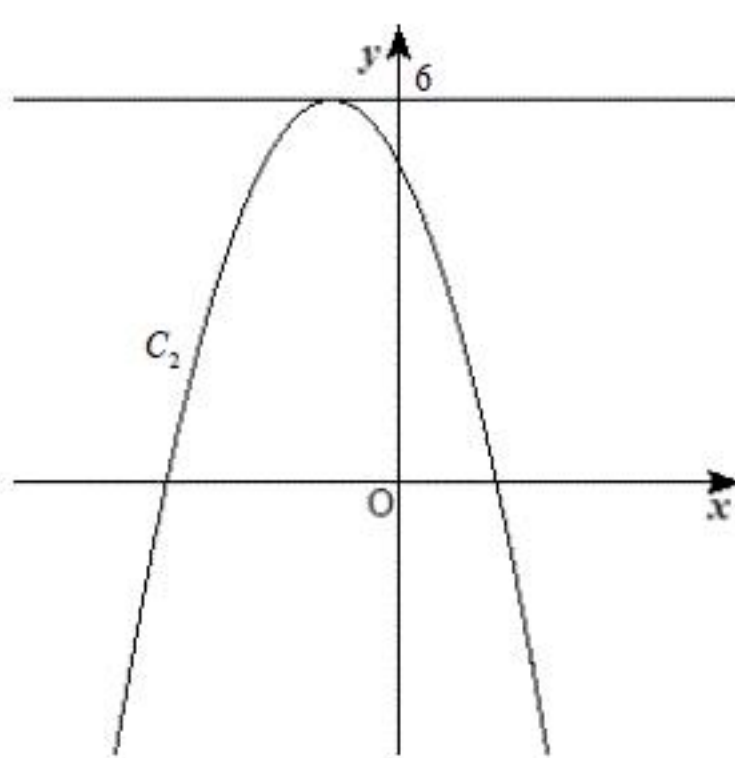
$$2a - 2 = 0$$

$$\therefore a = 1$$

となる。

(答) $a = 1$

(2)



曲線 C_2 は $y = -x^2$ を平行移動したもので、 $y = 6$ の $x < 0$ の部分に接するから、接点の x 座標を p とすると、

$$y = -(x-p)^2 + 6 \quad (p < 0)$$

とおける。点 P は曲線 $C_1: y = (x-1)^2 - 4$ と直線 $y = 2x - 7$ の接点であるから、その x 座標は、

$$(x-1)^2 - 4 = 2x - 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

となり、接点は $P(2, -3)$ となる。 $y = -(x-p)^2 + 6$ が点 P を通るから

$$-3 = -(2-p)^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 4p - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (p+1)(p-5) = 0$$

$$p = -1 \quad (\because p < 0)$$

となる。以上から曲線 C_2 の方程式は

$$y = -x^2 - 2x + 5$$

となる。また C_1 と C_2 の共有点の x 座標は

$$(x-1)^2 - 4 = -x^2 - 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)(x+2) = 0$$

$$\therefore x = 2, -2$$

となるから、求める共有点の座標は

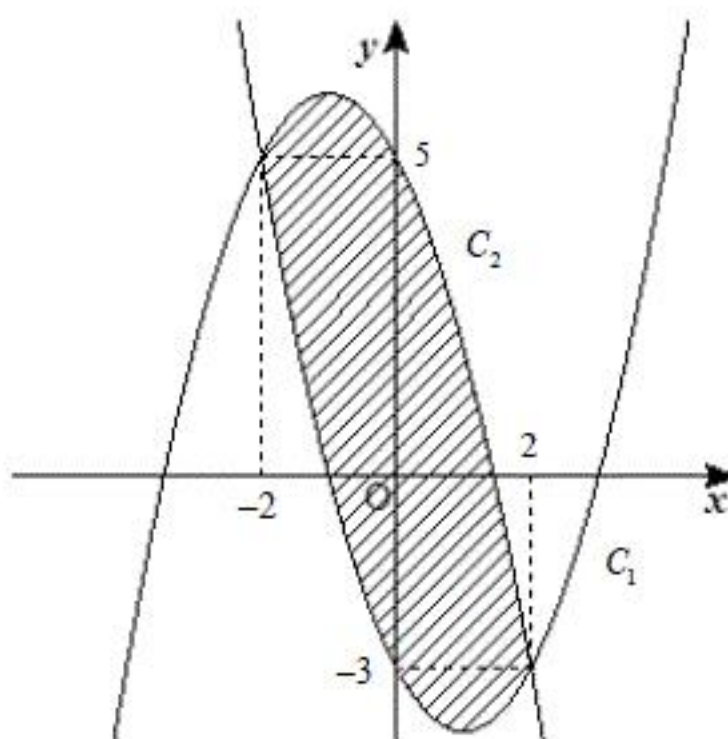
$$(-2, 5), (2, 3)$$

となる。

(答) $C_2: y = -x^2 - 2x + 5$, 共有点: $(-2, 5), (2, 3)$

(3)

以下の斜線部の面積を求めればよい。



求める面積は、

$$\begin{aligned}S &= \int_{-2}^2 \left\{ (-x^2 - 2x + 5) - ((x-1)^2 - 4) \right\} dx \\ &= \int_{-2}^2 -2(x+2)(x-2) dx \\ &= \frac{2}{6} \{ 2 - (-2) \}^3 \\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

である。

(答) $S = \frac{64}{3}$

問題 3

(1)

直線 l は 2 点 $A(1, 1)$, $P\left(\frac{1}{2}, t\right)$ を通るから、その方程式は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{1-t}{1-\frac{1}{2}}(x-1)+1 \\ &= 2(1-t)x+2t-1 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = 2(1-t)x + 2t - 1$$

(2)

$A(1, 1)$, $B(1, 0)$, $P\left(\frac{1}{2}, t\right)$ から、

$$\begin{aligned} AP^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + (1-t)^2 \\ &= t^2 - 2t + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BP^2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + t^2 \\ &= t^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$AB^2 = 1$$

である。

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= 2t^2 - 2t + \frac{3}{2} \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + AB^2 \end{aligned}$$

から、

$$AP^2 + BP^2 \geq AB^2$$

となる。ここで、 $\triangle APB$ において余弦定理を用いると、

$$\cos \angle APB = \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2 \cdot AP \cdot BP}$$

であるから、

$$\cos \angle APB \geq 0$$

である。よって、 $\angle APB \leq 90^\circ$ となる。

(証明終)

(3)

直線 l と直線 m は直行するから、(1)より直線 m の傾きは $-\frac{1}{2(1-t)}$ である。直線 m は点

$Q(\alpha, 0)$ を通るから、その方程式は、

$$y = -\frac{1}{2(1-t)}(x - \alpha)$$

となる。点 R は直線 l と直線 m の共有点であるから、その x 座標は、

$$\begin{aligned} 2(1-t)x + 2t - 1 &= -\frac{1}{2(1-t)}(x - \alpha) \\ \Leftrightarrow \{4(1-t)^2 + 1\}x &= \alpha + 2(t-1)(2t-1) \\ \therefore x &= \frac{\alpha + 2(t-1)(2t-1)}{4(1-t)^2 + 1} \quad (\because 4(1-t)^2 + 1 > 0) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{\alpha + 2(t-1)(2t-1)}{4(1-t)^2 + 1}$$

(4)

(3)より、 α が満たすべき条件は、

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\alpha + 2(t-1)(2t-1)}{4(1-t)^2 + 1} \leq 1$$

である。ここで、 $4(1-t)^2 + 1 > 0$ から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\leq \frac{\alpha + 2(t-1)(2t-1)}{4(1-t)^2 + 1} \leq 1 \\ \Leftrightarrow 2(1-t)^2 + \frac{1}{2} &\leq \alpha + 2(t-1)(2t-1) \leq 4(1-t)^2 + 1 \\ \Leftrightarrow -2t^2 + 2t + \frac{1}{2} &\leq \alpha \leq -2t + 3 \end{aligned}$$

となる。 $\frac{1}{2} \leq t < 1$ のとき、

$$-2t^2 + 2t + \frac{1}{2} = -2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$$

より、

$$\frac{1}{2} < -2t^2 + 2t + \frac{1}{2} \leq 1$$

となる。また、

$$1 \leq -2t + 3$$

となる。したがって、求める α の範囲は

$$-2t^2 + 2t + \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -2t^2 + 2t + \frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$$