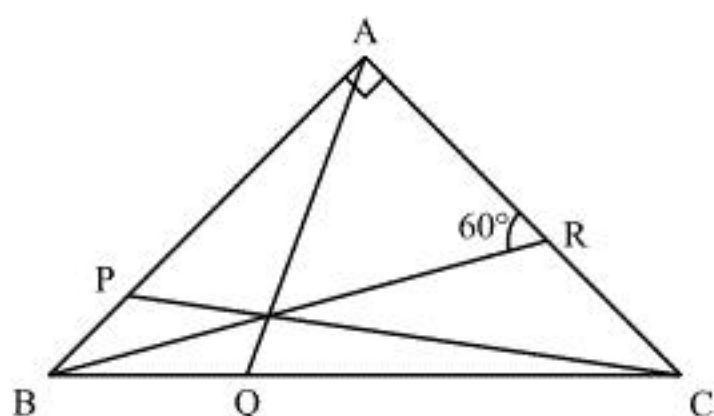


1

(1)



$\angle ARB = 60^\circ$ より、 $AC:AR = AB:AR = \sqrt{3}:1$ となる。よって、 $AR:RC = 1:(\sqrt{3}-1)$ である。チ

ェバの定理より、

$$\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BQ}{QC} \cdot \frac{CR}{RA} = 1$$

が成り立つから、

$$\begin{aligned} \frac{BQ}{QC} &= \frac{PB}{AP} \cdot \frac{RA}{CR} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}-1} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{6} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \frac{BQ}{QC} = \frac{\sqrt{3}+1}{6}$$

(2)

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($z \neq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とおく。このとき、ド・モアブルの定理より、

$$z^4 = r^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$$

である。一方、

$$\begin{aligned} z^4 &= -8 - 8\sqrt{3}i \\ &= 16 \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 2^4 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{cases} r^4 = 2^4 \\ 4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2n\pi \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

となる。よって、 $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ に注意すると、

$$\begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{6}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{11}{6}\pi \end{cases}$$

を得る。したがって解は、

$$\begin{aligned} 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) &= 1 + \sqrt{3}i \\ 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi \right) &= -\sqrt{3} + i \\ 2 \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi \right) &= -1 - \sqrt{3}i \\ 2 \left(\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi \right) &= \sqrt{3} - i \end{aligned}$$

より、 $z = \pm(1 + \sqrt{3}i), \pm(\sqrt{3} - i)$ である。

$$(\text{答}) \quad z = \pm(1 + \sqrt{3}i), \pm(\sqrt{3} - i)$$

(3)

初項 3、公差 4 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は、

$$\begin{aligned} a_n &= 4(n-1) + 3 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

となる。また、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ の平均は、

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (4k - 1) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned}$$

であり、分散は、

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - m)^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \{(4k - 1) - (2n + 1)\}^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (4k - 2n - 2)^2 \\ &= \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n \{4k^2 - 4(n+1)k + (n+1)^2\} \\ &= \frac{4}{n} \left\{ \frac{4}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{4}{2} (n+1)n(n+1) + n(n+1)^2 \right\} \\ &= 4(n+1) \left\{ \frac{2}{3} (2n+1) - 2(n+1) + (n+1) \right\} \\ &= \frac{4}{3} (n+1)(n-1) \\ &= \frac{4}{3} n^2 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 4n - 1, m = 2n + 1, s^2 = \frac{4}{3} n^2 - \frac{4}{3}$$

2

(1)

点Hは平面OAB上にあるため、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおける。このとき、 $\overrightarrow{CH}$ は平面OABに垂直であるから、

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{a} = 0 \\ (s\vec{a} + t\vec{b} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} s|\vec{a}|^2 + t\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ s\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 4s + 2t - \frac{4}{3} = 0 \\ 2s + 3t - \frac{4}{3} = 0 \end{cases} \\ & \therefore \begin{cases} s = \frac{1}{6} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

が成り立つ。したがって、

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

である。

(答) $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

(2)

$\triangle OAB$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4 \cdot 3 - 4} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

である。また、

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{CH}|^2 &= \left| \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{36}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{9}|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + \frac{1}{9}\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{9} - \frac{4}{9} - \frac{8}{9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

より、 $|\overrightarrow{CH}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ である。したがって、求める体積は、

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot S \cdot |\overrightarrow{CH}| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{9} \end{aligned}$$

となる。

(答) $V = \frac{\sqrt{6}}{9}$

(3)

直線CHと直線ONが交わるための必要十分条件は、

$$\vec{c} + k\overrightarrow{CH} = l\overrightarrow{ON} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる実数 k, l が存在することであり、このとき、

$$\overrightarrow{OP} = \vec{c} + k\overrightarrow{CH} = l\overrightarrow{ON}$$

と表せる。点Mは辺BCの中点であり、点Nは線分AMを4:1に内分するから、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ON} &= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{4}{5}\overrightarrow{OM} \\ &= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \end{aligned}$$

が成り立つ。これと(1)の結果より、

$$\begin{aligned} \vec{c} + k\left(\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c}\right) &= l\left(\frac{1}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{k}{6}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{b} + (1-k)\vec{c} &= \frac{l}{5}\vec{a} + \frac{2l}{5}\vec{b} + \frac{2l}{5}\vec{c} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{k}{6} = \frac{l}{5} \\ \frac{k}{3} = \frac{2l}{5} \\ 1-k = \frac{2l}{5} \end{cases} & (\because \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は一次独立}) \\ \therefore k = \frac{3}{4}, l = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\textcircled{1}$ を満たす実数 k, l が存在するから、直線CHと直線ONは交わる。

(証明終)

また、 $k = \frac{3}{4}$ より、 $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CH}$ となるから、

$$CP : PH = 3 : 1$$

である。

(答) $CP : PH = 3 : 1$

3

(1)

まず $f(x)$ の定義域は、根号の中身が 0 以上である必要があるから、

$$\begin{aligned}4-x^2 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -2 &\leq x \leq 2\end{aligned}$$

である。また、 $-2 < x < 2$ において $f(x)$ は微分可能であり、

$$\begin{aligned}f'(x) &= \sqrt{4-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} \\ &= \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 4-2x^2 &= 0 \\ \therefore x &= \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

が成り立つ。さらに、

$$\begin{aligned}f(\pm 2) &= 0 \\ f(\pm\sqrt{2}) &= \pm 2 \quad (\text{複号同順})\end{aligned}$$

より、増減表は以下のようになる。

x	-2	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0		-2		2		0

(答) 前表

(2)

l の傾きは

$$f'(1) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

であるから、 l の方程式は、

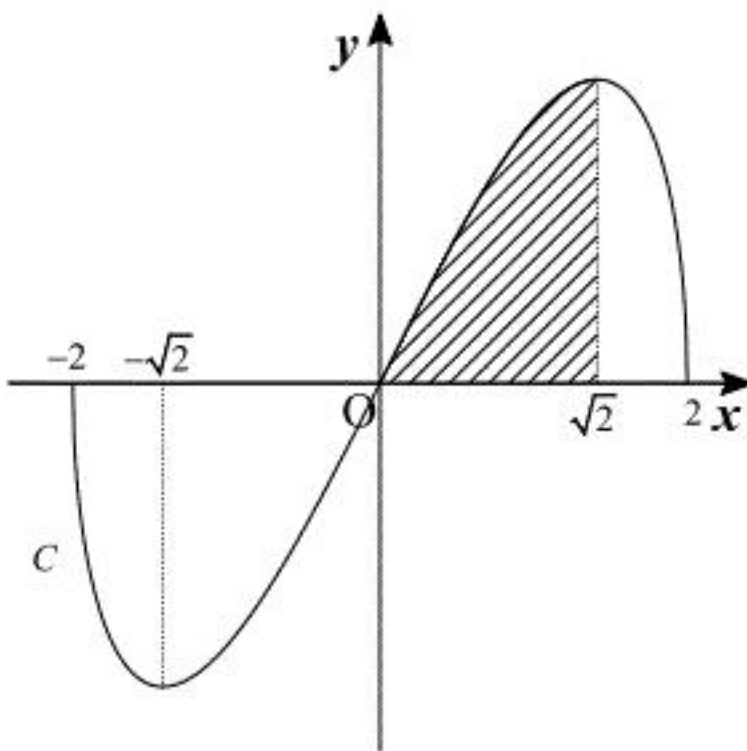
$$\begin{aligned}y - \sqrt{3} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}(x-1) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

となる。

(答) $y = \frac{2}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

(3)

増減表より、 C の概形は下図のようになり、求めるのは下図の斜線部の面積となる。



よって、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{4-x^2} dx\end{aligned}$$

である。ここで、 $x = 2\sin\theta$ とおくと、 x と θ は次のように対応する。

x	0	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

また、

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= 2\cos\theta \\ \sqrt{4-x^2} &= \sqrt{4-4\sin^2\theta} \\ &= 2\cos\theta \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4})\end{aligned}$$

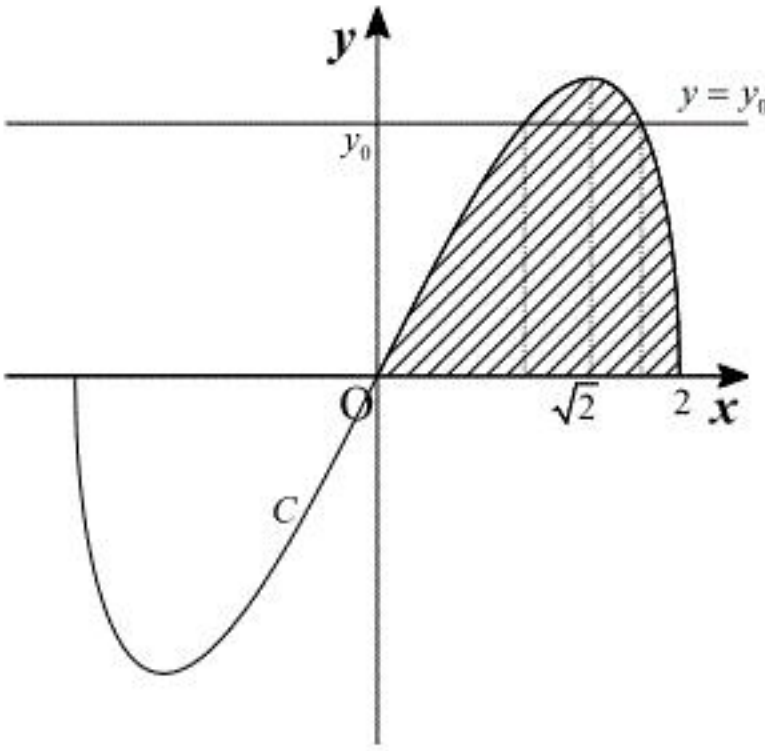
である。したがって、

$$\begin{aligned}S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sin\theta \cdot 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= -8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta (\cos\theta)' d\theta \\ &= -8 \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -8 \left(\frac{\sqrt{2}}{12} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

を得る。

(答) $S = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$

(4)



D は上図の斜線部のようになる。曲線 C の $x \geq 0$ の部分において、 $y \geq 0$ より、

$$\begin{aligned}y &= x\sqrt{4-x^2} \\ \Leftrightarrow y^2 &= x^2(4-x^2) \\ \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2 \pm \sqrt{4-y^2}\end{aligned}$$

であるから、曲線 C の $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ の部分を x_1 、 $\sqrt{2} \leq x \leq 2$ の部分を x_2 とすると、

$$\begin{aligned}x_1^2 &= 2 - \sqrt{4-y^2} \\ x_2^2 &= 2 + \sqrt{4-y^2}\end{aligned}$$

となる。したがって、求める体積は、

$$\begin{aligned}V &= \pi \int_0^2 x_2^2 dy - \pi \int_0^2 x_1^2 dy \\ &= \pi \int_0^2 (2 + \sqrt{4-y^2}) dy - \pi \int_0^2 (2 - \sqrt{4-y^2}) dy \\ &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{4-y^2} dy\end{aligned}$$

となる。 $y = 2\sin\theta$ とおくと、 x と θ は次のように対応する。

x	0	$\rightarrow$	2
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$

また、

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= 2\cos\theta \\ \sqrt{4-y^2} &= \sqrt{4-4\sin^2\theta} \\ &= 2\cos\theta \quad (\because 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})\end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\theta \cdot 2\cos\theta d\theta \\ &= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= 4\pi \left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi^2\end{aligned}$$

を得る。

(答) $V = 2\pi^2$

4

(1)

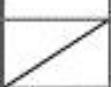
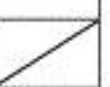
三角関数の合成を用いると、

$$\begin{aligned} y' &= -\pi e^{-\pi x} \sin(\pi x) + \pi e^{-\pi x} \cos(\pi x) \\ &= \pi e^{-\pi x} \{\cos(\pi x) - \sin(\pi x)\} \\ &= \sqrt{2} \pi e^{-\pi x} \sin\left(-\pi x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

である。ここで、 $0 \leq x \leq 2$ において、 $-\frac{7}{4}\pi \leq -\pi x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$ であるから、

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin\left(-\pi x + \frac{\pi}{4}\right) &= 0 \quad (\because \sqrt{2} \pi e^{-\pi x} > 0) \\ \Leftrightarrow -\pi x + \frac{\pi}{4} &= -\pi, 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{4}, \frac{5}{4} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、 $y = e^{-\pi x} \sin(\pi x)$ の $0 \leq x \leq 2$ における増減表は以下のようになる。

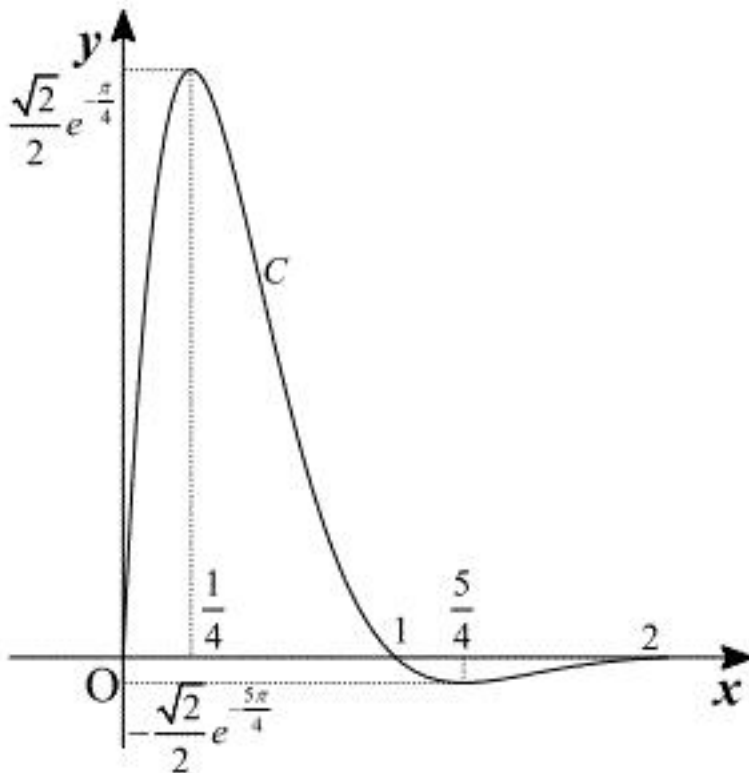
x	0	...	$\frac{1}{4}$	...	$\frac{5}{4}$	...	2
y'		+	0	-	0	+	
y							

さらに、

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(\pi x) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{4}\right) &= e^{-\frac{\pi}{4}} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} \\ f\left(\frac{5}{4}\right) &= e^{-\frac{5\pi}{4}} \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

より、 $0 \leq x \leq 2$ の範囲での C の概形は下図のようになる。



(答) 前図

(2)

$n-1 \leq x \leq n$ において y の符号は変化しないから、

$$\begin{aligned} S_n &= \left| \int_{n-1}^n y dx \right| \\ &= \left| \int_{n-1}^n e^{-\pi x} \sin(\pi x) dx \right| \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned} \int e^{-\pi x} \sin(\pi x) dx &= -\frac{e^{-\pi x}}{\pi} \sin(\pi x) + \int e^{-\pi x} \cos(\pi x) dx \\ &= -\frac{e^{-\pi x}}{\pi} \sin(\pi x) - \frac{e^{-\pi x}}{\pi} \cos(\pi x) - \int e^{-\pi x} \sin(\pi x) dx \\ &= -\frac{e^{-\pi x}}{\pi} \{\sin(\pi x) + \cos(\pi x)\} - \int e^{-\pi x} \sin(\pi x) dx \end{aligned}$$

となるから、 C を積分定数として、

$$\int e^{-\pi x} \sin(\pi x) dx = -\frac{e^{-\pi x}}{2\pi} \{\sin(\pi x) + \cos(\pi x)\} + C$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} S_n &= \left| \left[-\frac{e^{-\pi x}}{2\pi} \{\sin(\pi x) + \cos(\pi x)\} \right]_{n-1}^n \right| \\ &= \left| -\frac{e^{-n\pi}}{2\pi} \cos(n\pi) + \frac{e^{-(n-1)\pi}}{2\pi} \cos\{(n-1)\pi\} \right| \\ &= \left| -\frac{e^{-n\pi}}{2\pi} (-1)^n + \frac{e^{-(n-1)\pi}}{2\pi} (-1)^{n-1} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)^{n-1} \cdot e^{-n\pi}}{2\pi} (e^\pi + 1) \right| \\ &= \frac{e^{-n\pi}}{2\pi} (e^\pi + 1) \end{aligned}$$

を得る。

$$(答) \quad S_n = \frac{e^{-n\pi}}{2\pi} (e^\pi + 1)$$

(3)

(2)の結果より、数列 $\{S_n\}$ は初項 $\frac{e^{-\pi}}{2\pi} (e^\pi + 1)$ 、公比 $e^{-\pi}$ の等比数列である。その公比について、

$0 < e^{-\pi} < 1$ が成り立つため、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ は収束して、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^\pi + 1}{2\pi} (e^{-\pi})^n \right\} \\ &= \frac{e^\pi + 1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \\ &= \frac{e^\pi + 1}{2\pi (e^\pi - 1)} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{e^\pi + 1}{2\pi (e^\pi - 1)}$$